EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN
ONDER LEIDING VAN Dr H. MOOY EN Dr H. STREEFKERK,
Dr JOH. H. WANSINK VOOR WIMECOS EN J. WILLEMSE VOOR
LIWENAGEL

31e JAARGANG 1955/56

IV

P. NOORDHOFF N.V. GRONINGEN

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijkse afleveringen. Prijs per jaargang *f* 8,00. Zij die tevens op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde (*f* 12,50) zijn ingetekend, betalen *f* 6,75.

De leden van Liwenagel (Leraren in wiskunde en natuurwetenschappen aan gymnasia en lycea) en van Wimecos (Vereniging van Leraren in de wiskunde, de mechanica en de cosmografie aan hogere burgerscholen en lycea) krijgen Euclides toegezonden als Officieel Orgaan van hun Verenigingen; de leden van Liwenagel storten de abonnementskosten ten bedrage van *f* 3,00 op de postgirorekening no. 87185 van de Penningmeester van de Groep Liwenagel te Arnhem. Adreswijzigingen van deze leden te melden aan: Dr P. G. J. Vredenduin, Bakenbergseweg 158 te Arnhem. De leden van Wimecos storten hun contributie, die met ingang van 1 September 1953 gewijzigd is in *f* 6,— per jaar, op postrekening no. 143917 ten name van de Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam (hierin zijn de abonnementskosten op Euclides begrepen). De abonnementskosten op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde moeten op postgirorekening no. 806593, van de firma Noordhoff te Groningen voldaan worden onder bijvoeging, dat men lid is van Liwenagel of Wimecos. Deze bedragen *f* 10,— per jaar franco per post.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan Dr H. Mooy, Churchilllaan 107III, Amsterdam, aan wie tevens **alle correspondentie** gericht moet worden.

Artikelen ter opneming te zenden aan Dr H. Streefkerk, Oranje Nassauplein 15, Zeist. Latere correspondentie hierover aan Dr H. Mooy.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt.

INHOUD.

DE RUIMTEOPVATTING IN DE EXACTE WETENSCHAPPEN VAN KANT TOT HEDEN

door

H. FREUDENTHAL (Utrecht) [1].

Wanneer ik begin met eraan te herinneren, dat Immanuel Kant op 12 Februari 1804 is overleden, zult u misschien vermoeden, dat het de spreker is vergaan als een kip, die haar ei niet kwijt kon, en dat ei zou dan natuurlijk zijn een redevoering over Kant, die reeds een jaar geleden, ter 150e herdenking van zijn overlijden, had moeten worden gehouden en nu naarmate de vertraging groter werd, met des te doordringender gekakel moet worden gespuid. Ik zal later bewijzen, dat deze verdenking misplaatst is. Uw argwaan zou echter niet helemaal ongegrond zijn. Lang werden de jaartallen congruent 4 en congruent 24 modulo 25 met stipte regelmatigheid door herdenkingen van Kant's overlijden en geboorte gekenmerkt, maar het lijkt haast, of men in 1954 Kant ineens vergeten was. Het zou in 1954 werkelijk niet gemakkelijk zijn geweest, een redevoering over Kant kwijt te raken. De Kant-conjunctuur is tot een ongekend dieptepunt gedaald. Een zo bijzonder knap werk als Magdalena Aebi's „Kants Begründung der deutschen Philosophie" (1947), waarin met Kant wordt afgerekend door een zeer scherpzinnige, maar ook zeer emotionele vrouw, heeft weinig weerklank gevonden, bij vrienden noch tegenstanders.

Dit is een goed teken — dunkt me. Versta me wel! Ik misgun Kant niet de onweerswolken, die zich in de philosofische atmosfeer van weleer rond zijn Olympos plachten te verdichten, en de stormachtige ontladingen, die eruit voortkwamen. Maar meer rust in de dampkring zal alleszins bevorderlijk zijn voor het serieuze Kantonderzoek, waaraan ondanks al hetgeen over Kant werd geschreven, nauwlijks is begonnen.

Philosophie lijkt, in sommige handboeken, niets anders te zijn dan een geschiedenis van al die meningen, die in de loop der eeuwen gehuldigd zijn door diverse philosofen. Maar op de keper beschouwd zijn de philosophen slechte historici. De houding, die de philosoof

[1]) Lezing, gehouden op de ledenvergadering van Liwenagel op 16 april 1955.

ex officio inneemt jegens zijn voorgangers, is ze te willen interpreteren en te commentarieren, d.w.z. eigen gedachtengoud te spinnen uit de wol, die zij hebben nagelaten. Lange tijd hebben trouwens ook de natuuronderzoekers niets anders weten te doen met het erfdeel der Griekse wetenschap. Toch is het vreemd, dat van de „verstehende" en „einfühlende" methode, die voor de α-wetenschappen karakteristiek heet te zijn, zo weinig terecht komt, waar rekenschap moet worden afgelegd over de erfenis, die men onder zijn hoede heeft.

Zo wordt het begrip van Aristoteles' werk nog vrijwel onmogelijk gemaakt door een „authentieke" Aristoteles-interpretatie, die zich in de Middeleeuwen heeft ontwikkeld en krachtig voortleeft in de Neo-scholastiek. De eerste generatie, die diep onder de indruk van Kant's werk, niet meer getuige was geweest van Kants philosofische wording, heeft het beeld beslissend overgeschilderd, en de volgenden hebben er nieuwe trekken aan toegevoegd. Die Kant, die thans gemeengoed is, is definitief op het einde van de 19e eeuw tot stand gekomen. Het werk, om al die verf- en vernislagen te verwijderen, zal heel wat meer moeite en tijd kosten dan de restaurateurs aan van Eycks Lam hebben besteed.

Kant zou het verdienen, dat men zich hiervoor inspande. Hij is zonder twijfel een der merkwaardigste figuren, die de mensheid heeft voortgebracht. Geen begrip der 18e eeuw is mogelijk, als men Kant niet heeft begrepen. Maar het omgekeerde is even waar en juist dat wordt te veel vergeten: Geen begrip van Kant zonder diep inzicht in de geestesgesteldheid van zijn eeuw. Men kan deze gesteldheid echter niet vatten, als men zich ertoe beperkt, kennis te nemen van de philosofische stromingen en hun bronnen. Anders dan in Engeland heeft zich op het continent in die tijd de philosofie nog niet geëmancipeerd van de wetenschappen. De natuurwetenschappen zijn nog steeds de voedingsbodem der wijsbegeerte, en Kant is in eerste instantie een beoefenaar van die wetenschappen geweest. Een uitstekend beoefenaar — kan ik u verzekeren, en u zult dit op mijn gezag moeten accepteren of zelf naar Kant's werk moeten grijpen, om onder de indruk te komen van zijn heldere, scherpzinnige, in de beste zin natuurwetenschappelijke onderzoekingen. Ik beveel u dan echter niet zijn evolutieleer van het heelal aan, zijn meest befaamde, maar minst geslaagde werk op dit gebied. Hij was bovendien een uitstekend essayist en stilist — de „Träume eines Geistersehers" getuigen ervan. Hij was een erkend geleerde en beroemd man, lang voor de „Kritik der reinen Vernunft" verscheen. Was dat niet het geval geweest, dan zou hij op dit grillige,

wijdlopige, chaotische en voor het grootste deel onbegrijpelijke werk nooit de aandacht van zijn *tijdgenoten* hebben kunnen trekken, waarin die van het *nageslacht* moest wortelen.

Het lijdt voor mij geen twijfel, dat Kant de natuurwetenschap van zijn tijd souverein beheerste. De wiskunde incluis. Ten onrechte loochent men dit. Men wijst erop, dat elke wiskundige formule in zijn werken ontbreekt. Op zijn minst van één verhandeling kan men aantonen, dat zij niet puur qualitatief is, maar gegrond op allesbehalve triviale mathematische analyses (. . . Ob die Erde in ihrer Umdrehung um die Achse . . . einige Veränderung . . . erlitten habe, 1754). Kant heeft de berekeningen niet gepubliceerd, maar uit de numerieke resultaten, die hij wèl in de publicatie opnam, blijkt, dat de berekeningen er geweest en vakkundig gedaan zijn. Ik zie ook geen enkele aanwijzing, waarom Kant (zoals men beweert) de toen moderne analytische methoden in meetkunde, algebra en mechanica niet zou hebben gekend en beheerst. Of hij ze ook heeft gewaardeerd, is een andere kwestie, waarop we nog terug moeten komen.

In 1637 deed een nieuwe methode haar intrede in de aloude meetkunde: Descartes' analytische meetkunde, die de synthetische meetkunde van Euclides spoedig zal overvleugelen. Een tot heden toe ongemeen vruchtbare tegenstelling in meetkundige werkwijze dateert van dat jaar. De meetkundige figuren zijn volgens de synthetische methode intuïtief gegeven of intuïtief gesynthetiseerd uit intuïtieve gegevens. De analyst daarentegen ontleedt die figuren juist met behulp van coördinatenstelsels en beschrijft ze door vergelijkingen in die coördinaten. Dat is de mathematisch gekleurde zin van de woorden „synthetisch" en „analytisch", die in de meetkunde tot in onze dagen sterk wordt aangevoeld.

Zó gebruikt Kant die woorden, wanneer hij van sysnthetische en analytische definities, begrippen en oordelen spreekt. Een synthetisch oordeel stelt een synthese van gegeven begrippen voor; in een analytisch oordeel wordt een begrip ontleed. „Alle lichamen zijn uitgebreid" is een analytisch oordeel, want analyseert men het begrip „lichaam", dan blijkt onomstotelijk, dat we nu eenmaal niets lichaam noemen, of het is uitgebreid. „$7+5 = 12$" is een synthetisch oordeel, want het behelst een synthese van 7 en 5 tot 12. (Wanneer we Kant konden vragen, wat $12-7 = 5$ voor een oordeel is, zou hij ongetwijfeld „analytisch" antwoorden.) „Alle lichamen zijn zwaar" is synthetisch, want niemand zou aarzelen, aan uitgebreidheden, die weerstand bieden tegen doordringing, het praedicaat „lichaam" toe te kennen, al zijn ze niet zwaar; in het

oordeel voltrekt de geest een essentiële synthese tussen „lichaam" en „zwaar".

Wie de Kant-literatuur kent, weet dat deze lezing niet overeenkomt met de geijkte. Analytische oordelen kunnen niet anders worden verkregen dan door de formeel logische operaties en derhalve is men de analytische oordelen gaan identificeren met de door formeel logische operaties verkrijgbare. Deze ontwikkeling begon, zodra Kant's werk in de handen kwam van interpretatoren, die Kant's affiniteit tot de wiskunde misten en van de mathematische oorsprong van de termen „synthetisch" en „analytisch" niets afwisten. Op de absurditeiten in Kant's werk, waartoe deze onjuiste interpretatie leidde, wezen ze met een straffende vinger, maar ze verzuimden, de hele hand in hun eigen boezem te steken.

Deze verwarring is in onze dagen, door het werk van Couturat en Russell, compleet geworden. Beth is, naar ik meen, de eerste geweest, die Kant's bedoelingen achterhaalde — ik heb niet de indruk, dat dit veel heeft gebaat. Niet om Beth's prestatie te verkleinen, voeg ik eraan toe, dat anderen onafhankelijk van Beth tot hetzelfde inzicht zijn gekomen: geen wiskundige, die niet alleen de „Kritik", maar ook het zogenaamd „voorcritisch" werk van Kant bestudeert, zal de verbazende gelijkenis tussen de wiskundige terminologie en de door Kant bedoelde aan zijn aandacht laten ontsnappen.

Men moet de tegenstelling „synthese—analyse" in Kant's tijd trouwens nog uit een andere bron afleiden. De wetenschappelijke omwenteling in de 16e-17e eeuw mag men niet alleen als een mathematisering zien. De nieuwe visie wordt op zijn minst nog door één andere component bepaald — een component, die ik de analytische werkwijze zou willen noemen. Van analytische tendenties bespeurt men in de Griekse wetenschap heel weinig: in de nieuwe wetenschap is analyse de methode én de leuze. Laat ik dit aan één voorbeeld toelichten. Het voorttelen van planten en dieren is in de oude wetenschap een onproblematisch gebeuren. Het is de meest vanzelfsprekende zaak, dat het zaad kiemt en dat er nieuwe planten uit voortkomen, dat ongedierte uit verrotting ontstaat en jonge dieren door de sexuele bevruchting. Dit zijn zo eenvoudige processen in het oog van de door moderne wetenschap niet beïnvloede mens, dat ze geen analyse behoeven of verdragen. Dat het bij de sexuele handeling gestorte sperma in totaal voor de bevruchting nodig is, dat de levenskracht en het geslacht van het nieuwe individu afhankelijk zijn van de hoeveelheid sperma, dat verliezen van sperma bij de bevruchting gebreken van het nieuwe schepsel ver-

oorzaken, dat zijn opvattingen, waarin het integrale van de bevruchting tot uiting komt. De ontledende kracht van de mikroskoop, die in het sperma de spermatozoiden opspoort, is symbolisch voor de ontledende geest van de moderne wetenschap in haar geheel.

Volgens de naieve opvatting bemiddelen de zintuigen integrale beelden van de werkelijkheid. Daartegenover staat het moderne inzicht, dat netvlies, trommelvlies en epidermis de totaliteit der physische invloeden op het lichaam volgens (als het ware) atomaire prikkels ontleden. Maar hiermede wordt ook, naar het schijnt, een fundamenteel wijsgerig probleem gesteld: Hoe speelt de ziel het klaar, dit ontlede geheel te synthetiseren tot het beeld van de werkelijkheid, dat in de ziel nu eenmaal wordt geconstateerd? Hoe kom ik ertoe, van de „Nachtwacht" te spreken, wanneer ik „in feite" toch maar een som van kleurstippen waarneem? De Engelse philosofen, vooral Berkeley, hebben met dit probleem veel onheil gesticht. Pas in onze eeuw hebben de psychologen zich op deze vraag bezonnen en er het foutieve van herkend, maar desniettemin wordt de traditie van die scheef getrokken psychologie nu nog in het werk van Bertrand Russell voortgezet en ook gehandhaafd door vele door Russell beïnvloede „logische empiristen". „Iets roods zien" is in deze literatuur het telkens terugkomend (irreële) voorbeeld van een elementaire waarneming, terwijl de psychologen sinds een halve eeuw zijn gaan inzien, dat men wel een roos in een vaas waarneemt, of een kennis met een rode das, of een vogel met een rode veer, maar geen geïsoleerde kleur „rood". Natuurlijk is het een probleem, hoe de zintuigelijke prikkels in de hersenschors samenwerken. Het is een physiologisch probleem, geen psychologisch probleem. De atomaire psychische waarnemingen, die men aan elementaire physische prikkels zou willen parallel stellen, bestaan eenvoudig niet, en de vraag, hoe de ziel ze synthetiseert, is ijdel.

In Kant's tijd kon men er anders over denken. De begrippen „psychisch" en „physisch" waren minder scherp omlijnd. Terwijl wij, als wij ons van metaphysica onthouden, de ziel functioneel opvatten, dus ziels*functies* bedoelen, als we van „ziel" spreken, is het in de 18e eeuw nog geenszins een uitgemaakte zaak, of de ziel immaterieel is — ook Kant aarzelt in dat leerstuk nog. Van de 18e eeuwse opvattingen moge een voorbeeld uit Kant (Träume eines Geistensehers) getuigen. Hij tracht de waanzin psycho-physiologisch als volgt te verklaren: waarnemingen worden door het subject gelocaliseerd in dat punt, waaruit de lichtstralen (of akustische signalen) echt of schijnbaar naar het subject toe divergeren; de gezonde localiseert hersenschimmen binnen zijn hoofd, maar bij de zieke is

dat divergentiepunt tengevolge van kronkelingen in de hersens naar buiten verplaatst, en hij localiseert dus buiten, wat hij binnen behoorde te localiseren.

Bij de oude vraag, hoe de ziel uit al die paarden hèt paard synthetiseert, heeft zich sinds de opkomst der moderne natuurwetenschappen de nieuwe naar de synthese der zintuigelijke indrukken gevoegd. Pas als men dit probleem van wijsbegeerte en natuurwetenschap der 18e eeuw heeft onderkend, kan men beseffen, hoe Kant ertoe komt, in de synthese de essentiële functie van de ziel te zien en die synthese onder meer ook intuïtief (dwz. aanschouwelijk en niet intellectueel) te duiden. De synthetische methode is voor hem ook en juist in de wiskunde de ware. De wijsgeer kan slechts analytisch definiëren, want vrij scheppende synthese is alleen mogelijk in het aanschouwelijke, terwijl de objecten der philosophie abstract zijn en door hun vormen en tekens slechts worden *aangeduid.* De wiskundige betaamt de synthetische methode, want zijn objecten zijn zo concreet, dat zij door tekens kunnen worden vervangen, waarmee vrijelijk kan worden gewerkt. Een trillioen is een verschrikkelijk groot getal, maar in de getalaanduiding voor het trillioen kan het trillioen ten volle aanwezig zijn. De getekende driehoek vervangt symbolisch in concreto de abstracte. Maar niets is er in concreto wat symbolisch b.v. het begrip „wilsvrijheid" vervangt.

Kant verwerpt de analyse, die zich in de wiskunde heeft ontwikkeld, niet, maar hij acht deze methode toch inferieur — hij heeft dit nooit uitgesproken, maar dat is de noodzakelijke consequentie van deze opvattingen. Hij is en blijft een echte leerling van Newton, die, hoewel een der uitvinders van de infinitesimaalrekening, in zijn hoofdwerk, de Philosophiae naturalis principia mathematica, de nieuwe analyse vermijdt en alle bewijzen naar de synthetische Euclidische methode heeft bewerkt. Vóor de Bernouilli's, d'Alembert, Euler, Lagrange, en Laplace was de taak weggelegd, Newtons schepping uit het keurslijf van de synthetische methode te bevrijden. Kant echter hield van dit keurslijf. De synthetische meetkunde was hem vertrouwd. Zij garandeerde hem een aanschouwelijkheid, die hij in het analytische apparaat node miste. Kant's mathematisch abstractievermogen schiet hier tekort, hier zijn grenzen, die hij niet kan overschrijden.

Wanneer men om zich heen kijkt en ziet hoevelen heden dat analytische apparaat met dezelfde aanschouwelijkheid beheersen als de synthetische meetkunde (of wellicht met een grotere) en wanneer men hiernaast de primitieve voorbeelden zet, waarmee de intuïtie bij Kant telkens wordt gedemonstreerd, dan moet men wel

concluderen, dat hier iets niet in den haak was. Kant's eeuw is de bloeitijd der analyse. Om de synthetische meetkunde bekommerde zich al lang geen productief mathematicus meer. Kant's voorliefde in de wiskunde is ouderwets. Dat Locke, Hobbes, Berkeley, Hume de wiskunde met Euclides identificeren, spreekt haast vanzelf. Van de grote natuurwetenschappelijke erudiet Kant zouden we iets anders hebben verwacht.

De infinitesimaalrekening miste in die tijd de exactheid van de Euclidische meetkunde. Dit had voor Kant een der argumenten kunnen zijn, om haar te verwerpen. Maar dat was het niet. In „De mundi sensibilis atque intelligibilis forma et principiis" keert hij zich tegen hen, die de absurditeit van het infinite willen aantonen. Het oneindige is een gedachtending, geen intuïtie. Dat beslist voor hem, en Kant mist het abstractievermogen, om de stap van de primitieve aanschouwelijkheid van de Euclidische meetkunde naar de hogere der analyse te doen.

Hoe Kant tekort schiet door zijn gehecht zijn aan een primitieve aanschouwelijkheid, kan ik aan een voorbeeld laten zien. Tegen Leibniz, die hij met dezelfde hardnekkigheid bestrijdt als Leibniz vocht tegen Descartes, wil Kant het absolute karakter van de ruimte, door Newton gepostuleerd, bewijzen. Leibniz immers had tegen de school van Newton dat absolute karakter aan de ruimte ontzegd: de ruimte was het systeem van orde der coëxistente dingen. Kant wil aantonen, dat er ruimte is onafhankelijk van de dingen, die haar moeten vullen, dat de ruimte aan de dingen voorafgaat, terwijl er voor Leibniz geen ruimte is zonder dingen. Kant wil dus Newton volgen, die de ruimte had verabsoluteerd, en Newtons aanhangers, die in zeker opzicht zelfs God identificeerden met de ruimte — de noozakelijke consequentie van die verabsolutering en tevens een geschikt argument, om Gods alomtegenwoordigheid te verklaren.

Kant redeneert als volgt (Von dem ersten Grunde des Unterschieds der Gegenden im Raume, 1768): Het is waar, dat in de wereld geen absolute plaats is. Elke plaats is slechts met betrekking tot andere vastgelegd. Toch is er iets absoluuts. Een rechterhand is niet beschreven door de onderlinge ligging van zijn delen; bij een linker hand is die immers precies dezelfde, terwijl er onmiskenbaar een verschil tussen linker- en rechterhanden is.

Tot zover klopt alles, maar nu komt de misstap: Wat een rechterhand is, is niet door interne eigenschappen van het object bepaald, maar door zijn relatie tot de ruimte. De ruimte gaat dus aan het object vooraf, want anders kon er geen relatie van het object tot de ruimte zijn.

De fout schuilt hierin: wat een rechter hand is, is niet bepaald door de relatie van het object tot de ruimte, maar door zijn ligging t.a.v. bij voorbeeld een linkerhand. I.p.v. een linkerhand mag het ook enig ander object zijn, dat een asymmetrie vertoont; tegenwoordig zouden we hiervoor b.v. een als rechtshandig geproclameerd assenstelsel kiezen. We zouden ook zeggen: Het begrip rechterhand is slechts zinvol in een van een oriëntering (door middel van een asymmetrische figuur) voorziene ruimte. In een lege ongeoriënteerde ruimte is er geen begrip „rechterhand".

Zou nu de meetkundige ruimte niet uit zichzelf een voorkeur-oriëntering bezitten? Neen, dat kan niet, want in de meetkundige ruimte is de spiegeling een toegelaten transformatie, die de ruimtestructuur niet verandert en toch rechts en links verwisselt, zoals een verschuiving of draaiing het doet met de plaatsen in de ruimte. Er bestaat geen reden, om aan de twee *oriënteringen* van de ruimte een absoluut karakter toe te kennen, dat men aan de *plaatsen* van de ruimte onthoudt.

Zo zouden we het paralogisme heden oplossen, maar om het als paralogisme te onderkennen, hoeft men geen beroep te doen op een moderne terminologie. Gauss heeft, enige tientallen jaren later, Kant's redenering weerlegd. Maar toen was het te laat. Met dezelfde drogredenen bewijst Kant in „De mundi sensibilis atque intelligibilis forma et principiis" in 1770 (niet meer de absoluutheid van de ruimte, waarvan hij ondertussen is afgestapt, maar) dat de ruimte een zuivere intuïtie is, dus een aanschouwing, die voorafgaat aan de ervaring (in principe is dat weer de absoluutheid, maar in het subjectieve gekeerd).

In het zojuist geciteerde werk is Kant's ruimte- en tijd-theorie, zoals men die uit de „Transcendentale Ästhetik" van de „Kritik d. r. V." kent, lang voor het verschijnen van de „Kritik" kant en klaar. Het belangrijkste, wat hierover in de „Kritik d. r. V." staat, is een vertaling in het Duits van „De mundi . . ." Men mag gerust zeggen, dat Kant's befaamde ruimte- en tijd-leer voortkomt uit een ontsporing, die men iemand als Kant moeilijk kan vergeven. In de „Kritik d. r. V." zelf ontbreekt deze bewijsvoering trouwens, maar in een ander werk der „kritische" periode, de Prolegomena (§ 13) vindt men haar terug, thans om de idealiteit van de ruimte aan te tonen.

Een zekere voorliefde voor het buitenissige kan men bij Kant herhaaldelijk constateren. De oriëntering van de ruimte is iets buitenissigs van een pakkende aanschouwelijkheid. Kant wordt erdoor gepakt, en hij kan er niet onder uit. Er zijn in de ruimte rechterhanden,

die Kant beletten zich een ongeoriënteerde ruimte te denken. De ruimte is immers aanschouwelijk bepaald, dus énig, en met geen dubbelzinnigheid behept. In die ruimte, door Kant voorzien van zijn eigen onderscheidingsvermogen voor rechts en links, bereikt Kant de grens van zijn meetkundige abstractievermogen.

Kant's „Kritik d. r. V." is in haar fundamenten een philosofie der wiskunde; haar hoofdprobleem is een probleem van grondvesting der meetkunde. De meetkunde is van ouds hèt voorbeeld van een rationele wetenschap. Het feit, dat de mens, naar het leek, puur redenerende, waarheden van meer dan logisch karakter, waarheden omtrent de werkelijke ruimte, kon verkrijgen, is een aansporing geweest, om more geometrico ook andere gebieden te doorgronden. Maar tevens ontstond het probleem: hoe is het mogelijk, dat de mens, als het ware zijn ogen sluitend voor de werkelijkheid, alleen vertrouwend op zijn verstand, uitspraken over die werkelijkheid kon doen? Vóór Kant gaf men op deze vraag over het algemeen het volgende antwoord: De meetkunde is de logische consequentie van definities en axioma's, die op evidente wijze het zijn of het zo zijn van de objecten bepalen, en van postulaten, die onvermijdelijk zijn, wil men in 't geheel meetkunde bedrijven (evident is bijvoorbeeld het bestaan van rechten, en de uitspraak, dat het geheel groter is dan een deel, en onvermijdelijk is bij voorbeeld het postulaat van de evenwijdige lijnen). Over de evidentie van de grondslagen bestonden nauwelijks meningsverschillen. Ook de empiristen twijfelden er niet aan. Alleen zochten ze de bron van de evidentie niet in de rede, maar in de ervaring.

Voor Kant is de wiskunde „apodictisch". Haar stellingen zijn onomstotelijke waarheden, en als zodanig kunnen zij niet a posteriori, d.w.z. na de ervaring zijn. Maar evenmin zijn zij uit de rede (of uit de rede alleen) zoals die der metaphysica. Want ze zijn synthetisch in de aanschouwing geconstrueerd. De vraag luidt nu: Hoe zijn synthetische oordelen a priori mogelijk? De mogelijkheid van analytische oordelen is nimmer problematisch; ze worden door de logica beheerst. De mogelijkheid van synthetische oordelen a posteriori, dus uit de ervaring, is in elk bijzonder geval een probleem van de ervaringswetenschap, die over de geldigheid van zulke oordelen met de tot haar beschikking staande middelen beslist. De vraag, waar het op aankomt, is, hoe onafhankelijk van de ervaring synthetische oordelen mogelijk zijn.

Willen de meetkundige stellingen onafhankelijk van de ervaring zijn, dan moet de ruimte zelf het zijn. Maar de ruimte mag ook weer geen gedachtending wezen, want anders zou zij alleen analytisch

definieerbaar zijn. De ruimte moet dus *zuivere aanschouwing* zijn (evenals de tijd, die in de mechanica de ruimte dient aan te vullen). Die zuivere ruimte moet niet tot de dingen behoren, die aan onze zintuigen verschijnen, en niet uit deze dingen afleidbaar zijn. De ruimte moet *ideëel* zijn, afkomstig van het subject; zij moet *formeel* zijn, dwz. aan de verschijnselen door het subject als vorm worden opgelegd. De ziel voltrekt de (zintuigelijke) synthese van de verschijnselen door middel van ruimte en tijd.

Dat is de formulering, waarin men Kant's ruimte- en tijdleer algemeen hoort voordragen. Zij is nog uit Kant's „vorkritische" periode afkomstig, en om haar te leren kennen, behoeft men niet de „Kritik d. r. V." te bestuderen, maar men mag genoegen nemen met de — veel bevattelijkere — „voorkritische" geschriften. Door de hele 19e eeuw is Kant's ruimte- en tijd-leer in deze formulering het onderwerp van hooglopende discussies geweest. Totaal ten onrechte!

Want in deze formulering verklaart de ruimte- en tijdleer niets. Het is net alsof ik de gravitatiewet van Newton zou mededelen in de vorm: de aantrekkingskracht is evenredig met iets en met nog iets en omgekeerd evenredig met het kwadraat van nog iets.

Zoals Kant's leer hier geformuleerd is, is het volkomen onverschillig, waar de van de ervaring onafhankelijke vormen „tijd" en „ruimte" aan de verschijnselen of aan de zintuigelijke indrukken worden opgelegd: buiten het subject of binnen het subject. Het komt er immers niet op aan, dat een apriorisch iets aan de indrukken ten grondslag ligt, maar dat het verstand het opvat (en wel niet ontledend, analytisch, maar constructief, synthetisch). Om het grofaanschouwelijk te zeggen: het kan het verstand geen zier schelen, of de apriorische vormen op enkele centimeters of op enkele decimeters afstand zetelen en werkzaam zijn.

De vraag luidt „hoe zijn synthetische oordelen a priori mogelijk?", en om die te beantwoorden, moet men aanwijzen wat ruimte en tijd (niet met de gewaarwordingen) maar met de oordelen te maken hebben. Ze zijn de vormen van de aanschouwing, maar toch niet van het verstand. Ook de oordelen staan onder vormen, maar dat zijn andere: de logische categorieën. Hier gaapt een klove, die men zich in alle discussies over Kant's ruimte- en tijdleer onvoldoende bewust heeft gemaakt.

Kant heeft heel duidelijk gezien, wat hier aan de hand was. De oplossing van het probleem heeft hij immers in de „Transcendentale Analytik" willen geven, en het getuigt van een verregaande oppervlakkigheid, om zich voor Kant's ruimte- en tijdleer alleen maar op

de „Transcendentale Ästhetik" te beroepen, zoals vrijwel steeds is geschied.

Hoe Kant's antwoord luidt, kan ik u helaas niet vertellen. Ik heb het ondanks telkens herhaalde pogingen niet begrepen, hoewel ik misschien bij elke poging een stap ben gevorderd. Ik ben trouwens niet de eerste, die dat niet heeft begrepen. In tegendeel, als ik erdoor was gekomen, zou ik de eerste zijn geweest, die het wèl had begrepen. Vóór Magdalena Aebi heeft zelf niemand gemerkt, welk probleem Kant in de „Transcendentale Analytik" heeft willen behandelen. Zij heeft, helaas, haar ontdekking bedorven, door tevens inzake de synthetische oordelen aan Kant toe te schrijven, wat de interpretatoren ervan hadden gemaakt. Zo is zij erin geslaagd, Kant op een zware denkfout te betrappen, die in werkelijkheid, althans in deze vorm, niet aanwezig is.

Ik acht het de moeite waard, om erachter te komen, hoe Kant het probleem van de synthetische oordelen in de „Transcendetale Analytik" meende te hebben opgelost. Ik had er anders niet zelf zoveel moeite aan besteed. De taak is veel zwaarder dan die waarvoor de „Transcendentale Ästhetik" de lezer stelt. Want in de „vorkritische" geschriften, die veel bevattelijker zijn dan de „Kritik d. r. V." is de weg naar de „Transcendentale Ästhetik" duidelijk herkenbaar uitgestippeld. De wortels van de „Transcendentale Analytik" in de „vorkritische" periode zou men echter nog moeten blootleggen. Dat lijkt me de enige weg, om tot begrip ook van Kant's ruimte- en tijd-leer te komen.

Ondertussen is het een droevige plicht, te constateren, dat de 19e eeuwse discussie-basis voor het ruimte- en tijdprobleem een leer is geweest, waarvan een groot deel materieel niet is begrepen, ja zelfs niet eens in zijn betekenis is onderkend; de torso, die overbleef, zou door Kant nimmer zijn aanvaard als zìjn ruimte- en tijdleer.

De oorzaak van dit verschijnsel is: dat nà Kant de philosofie op drift raakt. Ze verliest het contact met wiskunde en natuurwetenschappen, en Kant's stijl, een gril vermoedelijk van de verouderende vrijgezel, die zich aan nog ernstigere grillen dan deze te buiten gaat, strekt in 't vervolg ten voorbeeld aan, althans de Duitse, philosofen.

In de empirische natuurwetenschappen begint na Kant de strijd om de vraag, of de ruimtevoorstelling aangeboren is. Het „nativisme" knoopt bij Kant aan, maar heeft er bitter weinig mee te maken. De discussie is geheel onvruchtbaar gebleken, hoofdzakelijk omdat „ruimte-voorstelling" een veel te vaag en complex verschijnsel is, om een uitspraak erover empirisch te toetsen.

Interessanter is het de weg te vervolgen, die de *wiskunde* na Kant inslaat: Kant wordt over de hele lijn gedesavoueerd. De meest spectaculaire gebeurtenis is de ontdekking der niet-euclidisch meetkunde. De synthetische meetkunde die voor Kant het toonbeeld der wiskunde was, ontwaakt uit haar duizendjarige slaap, die sinds de oudheid slechts een enkele keer was onderbroken. Sinds Descartes en Fermat hadden de wiskundigen het veel te druk gehad met de analyse, om aan de synthetische meetkunde meer aandacht te besteden, dan een traditioneel onderwijsvak vroeg.

De 19e eeuw wordt een bloeitijd van de synthetische meetkunde, een tijd van grote vooruitgang. De eerste stappen, die zij doet, zijn: weg van Kant. Twijfelingen rijzen aan die wetenschap, die Kant apodictisch had genoemd; twijfel vooral aan het axioma van de evenwijdige lijnen. Dit axioma ontkennende ontdekt Gauss een niet-euclidische meetkunde. Uit vrees voor het „Geschrei der Böotier" laat hij aan anderen de taak over, de nieuwe meetkunde bekend te maken: de Hongaar Bolyai en de Rus Lobačevski ontdekken haar omstreeks 1830 opnieuw en schromen niet, hun ontdekking te publiceren.

Kantianen hebben getracht, de betekenis van deze ontdekkingen te loochenen of tenminste te verkleinen. De ruimte der niet-euclidische meetkunde zou in de zin van Kant een intelligibele ruimte zijn, en het was niet Kant's bedoeling intelligibele ruimten, ze mochten van de euclidische hemelsbreed verschillen, te weren. De intuïtieve ruimte is en blijft immers euclidisch.

De strijd gaat feitelijk om wat men „intuïtief, aanschouwelijk" wil noemen. De wiskundigen hebben allengs geleerd, aanschouwelijk om te gaan met objecten, die op die der euclidische meetkunde in de verste verte niet meer lijken; hun aanschouwelijkheid is soms zelfs groter dan die in de euclidische meetkunde. Wie bepaalt dus, wat aanschouwelijk is? De Papoea of de baby, die door onze meetkundige beschaving nog niet zijn beïnvloed, of de man op straat, wiens aanschouwings-ruimte strak getrokken is door rechte straten met rechte en evenwijdige muren, en aan wie de axioma's der euclidische meetkunde door alle voortbrengselen der techniek worden gesuggereerd? Het antwoord in de zin van Kant zou alleen kunnen luiden: Intuïtief is de meetkunde van de middelbare school, en intelligibel die van de universiteit — een uiteraard onbevredigend antwoord.

De Kantianen hebben zich nog op een andere verdedigingsstelling terug getrokken. Er is een zuivere intuïtie, ruimte genaamd, maar we laten in het midden, wat het woord ruimte inhoudt. We laten

na, haar eigenschappen te preciseren, zoals Euclides deed met zijn axioma's en Kant met de aanvaarding der euclidische ruimte. Helmholtz, die steeds nog tracht te bemiddelen, vindt wel „Kant's leer van de apriori gegeven vormen der intuïtie een zeer gelukkige en heldere uitdrukking voor de feitelijke verhoudingen, maar deze vormen moeten ledig van inhoud en vrij genoeg zijn, om iedere inhoud op te nemen". De axioma's der meetkunde horen er niet bij, want „ze beperken de inhoud zo, dat niet meer elke denkbare inhoud erin kan worden opgenomen, wil de meetkunde op de werkelijke wereld toepasbaar zijn".

Van Kant's poging om de mogelijkheid der synthetische oordelen a priori aan te tonen, is hier natuurlijk niets meer over. Welke meetkunde in de werkelijkheid geldt, moet proefondervindelijk worden beslist (en Helmholtz is evenals Gauss er geenszins zeker van dat dit de euclidische is). De intuïtieve ruimte moet, als het u belieft, geen eigenschappen bezitten, die door de werkelijke zouden kunnen worden gedesavoueerd.

Ik noemde de ontdekking van de niet-euclidische meetkunde spectaculair. In de 19e eeuwse ontwikkeling der meetkunde is zij echter maar één facet. Kant's gehele, op primitieve aanschouwelijkheid ingestelde beeld van de wiskunde wordt in de 19e eeuw overgekalkt. Wie niet de moeite neemt zich door lagen historisch vernis door te werken, kan hedentendage Kant's opvattingen nauwelijks meer begrijpen. Ruimten van willekeurig veel dimensies worden een serieus studie-object, en in onze eeuw laat men zelfs oneindig veel dimensies toe. De projectieve meetkunde ontstaat: men voegt aan het gewone vlak een oneindige rechte toe en laat evenwijdige lijnen zich op deze rechte snijden; door deze sprong over het onmiddellijk aanschouwelijke uit geraakt men tot een meetkunde, die de euklidische in schoonheid overtreft. Men construeert een meetkunde, de affiene, waarin er wel evenwijdigheid, maar geen congruentie is; een cirkel-meetkunde, waarin rechten en cirkels over één kam worden geschoren. Een meetkunde, waarin de fundamentele elementen niet punten, maar rechten zijn — het is een bonte verscheidenheid van meetkundige concepties, die formeel in de euclidische ruimte kunnen worden ingepast, maar die aanschouwelijk de grenzen der primitieve euclidiciteit overschrijden.

Uit deze verscheidenheid kies ik één voorbeeld. In 1854 hield Riemann zijn beroemde Antrittsvorlesung als privaat-docent „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen". Verleden jaar werd die gebeurtenis herdacht — en dat is de aanleiding voor mij geweest, om mij in de ontwikkeling van de ruimte-opvatting in

de vorige eeuw te verdiepen. Riemann is geen leerling van Kant, philosofisch is hij door Herbart beïnvloed, die wel als eerste gezien heeft, dat psychologisch aan de euclidische ruimte een — we zouden tegenwoordig zeggen — topologische ruimte voorafgaat. Ruwe, pas geleidelijk gedifferentieerde, „Reihenformen" (reeksen van opvolging) zijn het begin. Van dit kleurloze substraat van ruimte gaat Riemann uit. Mathematisch beschrijft hij het als meervoudig uitgebreide grootheid — *n*-dimensionale variëteit — zouden we tegenwoordig zeggen, d.w.z. iets wat in de omgeving van elk punt door *n* coördinaten kan worden beschreven. (Hij merkt ook op, dat niet alleen de ruimtelijke plaatsen zulk een variëteit vormen, maar ook de kleuren; de „assen" zijn zekere hoofdkleuren, coördinaat is de intensiteit, waarmee een hoofdkleur in een mengsel optreedt. Helmholtz heeft dit later precieser geformuleerd.) Riemann gebruikt geen philosofische termen, maar het is duidelijk, dat hij enige formele aprioriteit alleen aan die topologische ruimte toekent. Er moet dus iets bijkomen uit de ervaring: de metriek, het vergelijken van afstanden. Daarom spreekt hij in de titel van „hypothesen".

Feitelijk veronderstelt Riemann meer, maar dat kon in zijn tijd moeilijk anders. Hij veronderstelt al zijn functies zo fatsoenlijk, dat ze de methoden der analyse, dus in 't bijzonder het differentiëren, verdragen. De metriek moet de meest eenvoudige zijn; de afstand is in elk punt in eerste benadering van euklidische aard. Maar in de tweede benadering wordt niets gepostuleerd. In eerste benadering is een bol-oppervlak plat, nl. als men het in de omgeving van een punt door zijn raakvlak vervangt. In de tweede benadering is het gekromd. Riemann's idee is het, de mate van kromming uit inwendige eigenschappen af te lezen. Het tekort van de schuine zijde van een kleine rechthoekige driehoek (vergeleken met de volgens Pythagoras berekende schuine zijde) of het overschot in hoekensom (vergeleken met de 180 graden van de euclidische meetkunde) is in elk punt een maat voor de gekromdheid van de ruimte. We hoeven de ruimte niet te verlaten, om te weten, of zij vlak of hoe sterk zij gekromd is. We kunnen ons boven het aardoppervlak verheffen, om de schepen aan de kim te zien verdwijnen, maar we kunnen het hoofd niet buiten het heelal uitsteken, om zijn gekromdheid te constateren. We moeten het van binnen uit doen, en zo hebben de kosmologen van onze eeuw, Riemann volgend, het in de praktijk opgezet. Welke stap van een primitieve naar een gelouterde intuïtie — deze stap van het „van boven af" naar het „van binnen uit"!

Riemann's rede wordt pas na zijn — ontijdige — dood in 1866

gepubliceerd. Ongeveer gelijktijdig verschijnen Helmholtz' onderzoekingen over het ruimteprobleem. Helmholtz begint ook met de *n*-dimensionale variëteit als substraat, maar hij postuleert meteen het bestaan van vrij bewegelijke starre lichamen (iets wat Riemann tot het einde toe uitstelt, om alle mogelijkheden vrij te kunnen overzien). Helmholtz redeneert tegen Riemann: wil er metriek zijn, dan moet men lengten kunnen vergelijken, en dat kan men alleen met starre lichamen. Zonder die als feiten te aanvaarden, kan men geen *meet*kunde bedrijven. Riemann als het ware berispend, spreekt Helmholtz in de titel van zijn verhandeling van „Tatsachen, die der Geometrie zum Grunde liegen".

Helmholtz heeft natuurlijk ongelijk. Men meet niet met starre *lichamen*, maar met starre *maatstaven*, dus om zo te zeggen, met ééndimensionale lichamen. Maar toch heeft hij met zijn formulering aan de wiskunde een ruimteprobleem geschonken, vergelijkbaar met dat van Riemann, al is het niet zo wijds.

De oplossing van het probleem, die Helmholtz vindt (met zeer aanvechtbare methoden) is: de variëteiten, waarin starre lichamen vrij bewegelijk zijn, zijn Riemanns variëteiten met constante kromming, of te wel de euclidische en de niet-euclidische ruimten.

Riemann's en Helmholtz' opzet is analytisch — de analyse dient, om meetkundige problemen te formuleren en op te lossen. Het begrip variëteit is immers op getallen-coördinaten gebaseerd, en alle functies worden behoorlijk differentieerbaar verondersteld. Maar de meetkundige rust niet, eer hij de handige analyse in een schone synthese heeft herschapen.

Met Helmholtz' ruimteprobleem heeft men het kortgeleden eindelijk klaar gespeeld. Men behoeft van de ruimte topologisch alleen te veronderstellen, dat zij plaatselijk compact en samenhangend is en inzake bewegelijkheid niet meer dan dat elke driepuntige verzameling in elke ermee congruente door starre beweging kan worden overgevoerd. Van een synthetische formulering van Riemann's conceptie zijn we echter nog ver verwijderd.

Ondertussen was echter veel gebeurd, wat ik voorlopig heb verzwegen. Een der grote gebeurtenissen in de 19e eeuw is de analyse van het continuum. Nog Riemann en Helmholtz kwamen niet verder dan dat zij continua door coördinaten beschreven, die van hun kant thuis hoorden in het continuum der getallen. Men twijfelde er zelfs aan, of het anders kon, vooral nadat een opbouw der projectieve meetkunde los hiervan, puur synthetisch, foutief was gebleken. En aan de andere kant leek het getallen-continuum inderdaad een zuivere intuïtie, voor geen analyse vatbaar. In 1872 ontleden Cantor

en Dedekind het getallencontinuum, brengen het logisch terug tot de verzameling der gehele getallen. Tien jaar later doet Stolz hetzelfde met het meetkundige continuum en ontdekt, dat voor een autonome opbouw van de meetkunde, wil men doordringen tot het continuum, vereist is het axioma van Archimedes: een lijnstuk voldoende vaak verdubbeld gaat allengs elk ander lijnstuk overtreffen. Maar Stolz herontdekt ook dezelfde analyse van het continuum, die Dedekind had gevonden, in het 5e boek van Euclides — een prestatie van Eudoxos, waarover men steeds was heengelopen en waarvan de diepe zin nu pas bleek. In 1890 construeert Veronese een meetkunde in strijd met het axioma van Archimedes, en met deze flagrante schending van de aanspraak der primitieve aanschouwelijkheid op een continu zich gedragende meetkunde is het hek van de dam. De weg in de meetkunde staat open naar alle kanten, naar de pure topologie, dat zijn de ruimten zonder enige andere structuur dan de continuïteit, naar ruimten met vreemdsoortige continuïteiten en naar meetkunde gespeend van alle topologie.

Maar al het materiaal ligt ook gereed, om in de avondschemering van de 19e eeuw, die ook het ochtendgloren van de onze is, de vraag te beantwoorden, waarmee een eeuw geworsteld is:

Hoe is zuivere meetkunde mogelijk?

Het antwoord wordt door Hilbert gegeven, en het luidt anders dan enig philosoof had kunnen bevroeden, behalve misschien Leibniz, was hij zijn wiskundige roeping trouw gebleven. Nog Veronese wist hierop geen ander antwoord te geven dan Gauss of Riemann of Helmholtz. Voor hun was meetkunde de wetenschap van de reële ruimte binnen de grenzen van de meetnauwkeurigheid.

Hilbert stelt een axioma-systeem op voor de euclidische meetkunde, een volledig systeem (anders dan dat van Euclides), dwz. één dat aanspraak erop maakt alles te vermelden, wat voor de opbouw van de Euclidische meetkunde nodig is, en geen begrippen of eigenschappen steels uit de ervaring het systeem binnen te smokkelen. Aan de axioma's gaan niet als bij Euclides definities vooraf.

In het systeem komen woorden voor zoals punt, rechte, vlak, tussen, afstand, hoek, die niet gedefinieerd worden — ongedefinieerde begrippen. Namen, die niets noemen. Hoe kan ik werken met dingen, die niet gedefinieerd zijn? Welnu, in de axioma's staat vermeld, wat ik met die dingen mag doen: bij twee punten mag ik één rechte bedenken die ze verbindt, bij twee rechten ten hoogste één snijpunt, bij een lijn door elk punt een evenwijdige lijn; enz. Wat punten, rechten enz. zijn, wordt door de axioma's vastgelegd als door regels, die mij zeggen, hoe ik met deze dingen moet opereren.

De meetkunde wordt een schaakspel, waarin het paard niet gedefinieerd is door zijn kop, maar door de vreemdsoortige sprong, die het mag doen. De punten, rechten, enz. der meetkunde bestaan niet in de reële ruimte. Zij bestaan in dat systeem, dat meetkunde heet, en zij zijn daar gedefinieerd door de context of, zoals men tegenwoordig zegt, impliciet, met een term, die in het begin van de 19e eeuw door Gergonne was ingevoerd en daarna vergeten.

Wie schrijft ons de axioma's voor? Niemand! We zijn vrij ze te kiezen, en we hebben van deze vrijheid inmiddels ruimschoots gebruik gemaakt. Hilbert's axiomatiek is het voorbeeld geworden voor talloze, binnen en buiten de meetkunde.

Hoe is zuivere meetkunde mogelijk? Het antwoord luidt: als een systeem van relaties tussen ongedefinieerde dingen.

En de reële ruimte dan? Met die heeft onze zuivere meetkunde niets uitstaande, zolang als wij het niet wensen. Maar wens ik het, dan kan ik de zuivere theorie physisch toepassen. Ik kan potloodstippen en potloodkrassen punten en rechten noemen, ik kan sterren en lichtstralen het zelfde doen ondergaan — ik kan misschien heel andere dingen in de werkelijkheid aan heel andere ongedefinieerde dingen in mijn systeem laten beantwoorden. En dan kan ik vragen of het uitkomt, of theorie en werkelijkheid met elkaar kloppen. Doen ze het, dan ben ik blij, en doen ze het niet dan wijzig ik mijn axioma-stelsel of ik wijzig de toevoegingen tussen de abstracte en de concrete dingen, of ik verwerp allebeide; axioma's en correspondenties.

Hilbert's axiomatiek is het uitgangspunt voor een geheel nieuwe wetenschapsleer geworden, niet alleen toepasselijk op de meetkunde, maar op elke gemathematiseerde natuurwetenschap. In deze nieuwe wetenschapsleer is er geen plaats voor Kant's apriorisme, maar evenmin voor de inductie- en associatie-theorieën der Engelse empiristen.

De mathematische theorie van een physisch complex van verschijnselen is niet a priori, maar zij wordt evenmin door inductie verkregen. Dat alle lichamen vanuit dezelfde hoogte even snel vallen (als er geen storingen aanwezig zijn), is geen uitspraak, die we redelijk kunnen bewijzen; maar evenmin is het zo, dat wij deze uitspraak zouden geloven, omdat we ons van zijn waarheid in ontelbare proeven zouden hebben overtuigd. De veelheid van proeven is er niet, omdat de waarheid per dozijn goedkoper zou zijn, maar omdat we niet met één proef alle door ons vermoede storingen kunnen uitschakelen. We toetsen in die proefnemingen daarom afzonderlijk hoe de valsnelheid zou afhangen van de dichtheid van het omrin-

gende medium, van de zwaarte van het vallend lichaam, van zijn grootte, van zijn gewicht, van zijn chemische samenstelling, van de plaats waar de proef wordt genomen, van de bewegingstoestand, waarin die plaats zich bevindt, enz. We trachten, zekere voorwaarden waaronder de proef feitelijk geschiedt, te doodverven als storingen, en die voorwaarden te variëren, om de storingen te elimineren. We trachten, een „ideaal geval" te scheppen, vrij van storingen.

Naar de aanwijzingen, uit proeven verkregen, ontwikkelen we vervolgens een mathematische theorie, een *zuivere* wetenschap. We stellen zekere axioma's waarin ongedefinieerde begrippen (zoals weg, tijd, massa, enz.) voorkomen en leiden hieruit puur mathematisch stellingen af. Deze stellingen gaan we weer terugvertalen in de physische terminologie en zodoende komen we tot physische uitspraken, die we door nieuwe proeven kunnen toetsen. Worden ze bevestigd, dan zijn we blij, zo niet, zullen wij iets in ons systeem wijzigen.

Een naar het lijkt verschrikkelijk simpele leer! Waarom is men er niet vroeger op gekomen? Men is er vroeger op gekomen. Delboeuf, een vergeten Belgisch philosoof uit de vorige eeuw, mag de voorbarige auteur van deze leer heten — voorbarig, omdat het voornaamste beletsel voor deze leer hemzelf nog in de weg stond. Dit beletsel was: de meetkunde, zoals men die toen zag. Ook Delboeuf kon er niet onder uit. Wat hij over de meetkunde schrijft, beantwoordt niet aan zijn algemene visie. De ruimte als zuivere intuïtie, en de physische meetkunde als zuivere wetenschap komen toch weer om de hoek kijken, maar vooral de eis van een te nauw begrepen aanschouwelijkheid speelt Delboeuf parten.

Veertig jaar na Delboeuf is de weg pas geëffend voor zijn wetenschapsphilosophie, en ook dan duurt het nog vele jaren voor anderen haar herontdekken. De opheldering komt niet van de kant der philosophen, maar uit de vakwetenschappen, in het bijzonder uit de wiskunde, die geleidelijk in deze eeuw haar taak en wezen beter leert kennen en over de ruimte-problemen en -opvattingen van empiristen, rationalisten en „critici" gelijdelijk overgaat tot de orde van de dag, dat is tot wetenschap.

EEN LABILITEITSGEVAL UIT DE PRAKTIJK

door

F. J. Noz.

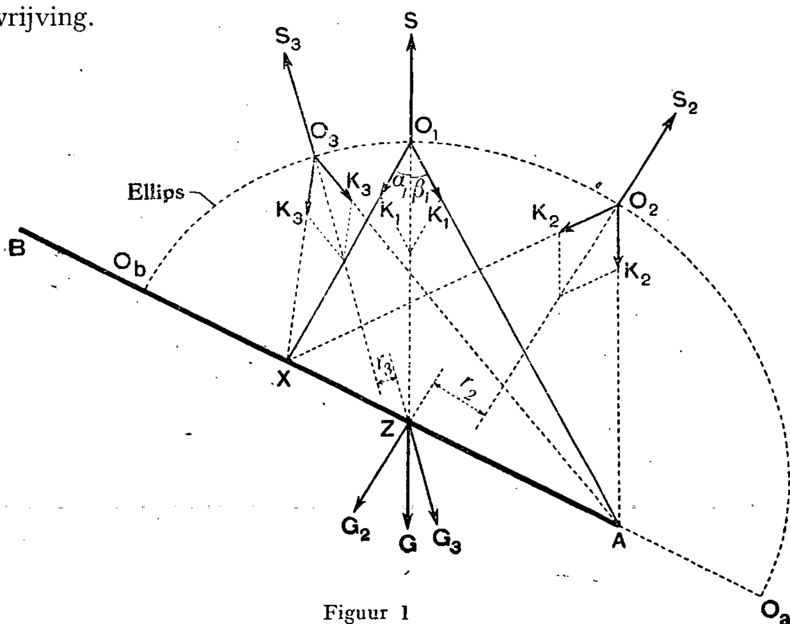
1. *Het probleem.*

Een staaf AB, met zwaartepunt Z op afstand a vanaf het uiteinde A, wordt met een koord ter lengte l, dat om een vaste katrol O geslagen is, opgehangen. Het koord wordt met het ene uiteinde in A bevestigd. In welk punt X van de staaf moet het andere einde van het koord worden vastgemaakt, opdat:

a. de staaf met het uiteinde A naar beneden komt te hangen in beslist stabiele toestand, waarbij het dus onmogelijk is dat dit uiteinde door een of andere oorzaak blijvend naar boven zwaait, en waarbij de afstand AX zo klein mogelijk zij?

b. de staaf met het uiteinde A naar boven komt te hangen in beslist stabiele toestand, waarbij het dus onmogelijk is dat dit uiteinde door een of andere oorzaak blijvend naar beneden zwaait, en waarbij de afstand AX zo groot mogelijk zij?

De straal van de katrol mag gelijk nul worden gesteld. Er is geen wrijving.



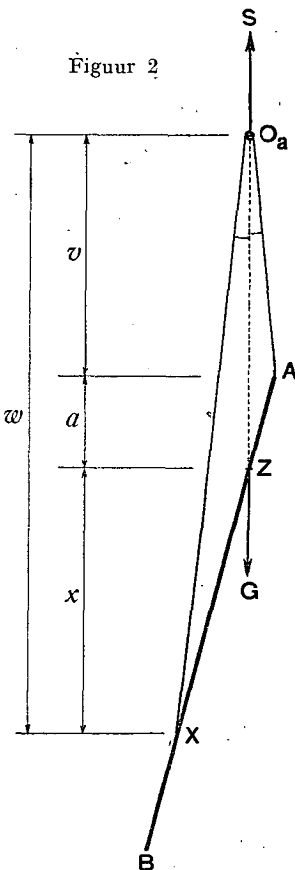
Figuur 1

2. *De oplossing.*

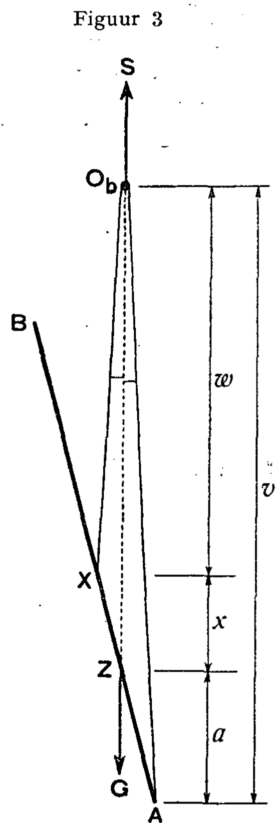
Neem aan, dat de in fig. 1 geschetste evenwichtsstand mogelijk is, waarbij $\alpha_1 = \beta_1$ is, de krachten in het koord gelijk zijn (voorwaarden van de wrijvingloze katrol), en de bissectrix O_1Z samenvalt met de verticaal werkende krachten S en G. Voldaan wordt immers aan de drie evenwichtsvoorwaarden voor het platte vlak: $\Sigma X = 0$, $\Sigma Y = 0$ en $\Sigma M = 0$.

Dit evenwicht is echter labiel, hetgeen uit het volgende zal blijken. Verschuif de katrol over een kleine virtuele afstand O_1O_2. Ofschoon nu opnieuw een evenwicht $\Sigma X_{(2)} = 0$ ontstaat, wordt een moment ontwikkeld, groot $G_2r_2 = S_2r_2$, dat pas verdwijnt als O in O_a terecht is gekomen. Dat hiermede stabiel evenwicht is bereikt, is met de geometrie van de ellips gemakkelijk te bewijzen, daar met O_aZ een maximale zwaartepuntsafstand is verkregen en aan het principe van Galileï wordt voldaan: het zwaartepunt van een labiel stelsel probeert steeds de laagst mogelijke positie in te nemen.

Figuur 2



Figuur 3



Ook de verschuiving O_1O_3 geeft een evenwichtsstoring met eindpunt O_b, eveneens een maximale zwaartepuntsafstand O_bZ en een stabiele positie.

Er blijken dus twee stabiele standen mogelijk te zijn.

Men kan zich verder voorstellen, dat het ophangpunt van labiel evenwicht, O_1 uit fig. 1, gekozen wordt op het verlengde van BA in fig. 2. De keuze van deze labiele beginstand brengt mede, dat van de beide stabiele standen slechts die van O_b uit fig. 1 overblijft. De bissectrix O_aZ valt dan samen met de rechte lijn O_aAB.

Op grond hiervan is met koordlengte $l = v+w$:

$$\frac{a}{x} = \frac{v}{w} = \frac{l-w}{w},$$

waaruit volgt:

$$w = \frac{xl}{a+x} \qquad \text{(a)}$$

Bovendien is

$$w-v = a+x,$$

hetgeen met

$$w+v = l$$

oplevert

$$w = \tfrac{1}{2}(l+a+x). \qquad \text{(b)}$$

Gelijkstelling van (a) en (b) geeft de vierkantsvergelijking:

$$x^2-(l-2a)x+a(l+a) = 0.$$

De discriminant is

$$\tfrac{1}{4}(l-2a)^2-a(l+a) = \tfrac{1}{4}l^2-2al,$$

en zal, gelijk nul gesteld, de bruikbare $l = 8a$ opleveren, benevens de onbruikbare $l = 0$. Aldus zijn er

Voor $l = 8a$ twee gelijke reëele wortels, n.l. $x_1=x_2=3a$, en voor $l > 8a$ twee ongelijke reëele wortels, n.l. $x_{1,2} = \frac{l-2a}{2} \pm \sqrt{\frac{l(l-8a)}{4}}$, beide met positief teken	(1)

(hetgeen direct is in te zien), dus voor het praktische probleem bruikbaar.

Dezelve laat echter geen mogelijkheid voor het derde geval $l < 8a$. Wordt de koordlengte toch kleiner dan $8a$ gekozen, dan kan aan het gevraagde onder a nimmer worden voldaan.

De vraag onder b kan worden beantwoord op grond van dezelfde overwegingen, maar nu voor de labiele positie met het uiteinde A naar beneden. Figuur 3 geeft deze limietstand aan.

$$\frac{a}{x} = \frac{v}{w} = \frac{v}{l-v}$$

waaruit volgt
$$v = \frac{al}{a+x} \qquad \text{(c)}$$

Verder is
$$v - w = a + x,$$
en
$$v + w = l,$$
zodat
$$v = \tfrac{1}{2}(l + a + x) \qquad \text{(d)}$$

Gelijkstelling van (c) en (d) leidt tot de vierkantsvergelijking:
$$x^2 + (l+2a)x - a(l-a) = 0.$$

De discriminant is nu
$$\tfrac{1}{4}(l+2a)^2 + a(l-a) = \tfrac{1}{4}l^2 + 2al,$$
en zal, gelijk nul gesteld, $l = -8a$ opleveren. De koordlengte kan echter nooit < 0 worden en bovendien moet voldaan worden aan de lengte voor het eerste bevestigingspunt n.l. $l \geqq 8a$. Aldus zijn er

Voor $l \geqq 8a$ twee ongelijke reëele wortels, n.l. de bruikbare wortel
$$x_3 = -\frac{l+2a}{2} + \sqrt{\frac{l(l+8a)}{4}} \quad \text{(positief)}, \qquad (2)$$
welke voor $l = 8a$ overgaat in
$$x_3 = +0{,}6569a,$$
en een onbruikbare negatieve wortel x_4.

In principe is het vraagstuk hiermede opgelost, al zal enige differentiaalmeetkunde nodig zijn om de betekenis van de berekende punten X_1, X_2 en X_3 te doorgronden. De schrijver heeft zich, hoewel bewust van het *contra bonos mores*, beperkt tot enkele *cum grano salis* op vlotte wijze met de tuinmansconstructie (de brandpunten zijn immers bekend) getrokken ellipsen, waaruit het volgende kon worden geresumeerd:

A. *De koordlengte* $l > 8a$:

Voor $x > x_2$ wordt een quasi-stabiel evenwicht verkregen. Het uiteinde A hangt ogenschijnlijk stabiel naar beneden. Drukt men het echter over een zekere afstand naar boven, dan zal plotseling een ommekeer in de stabiliteit teweeg worden gebracht met A naar boven gericht.

Voor $x_2 \geqq x \geqq x_1$ is de toestand, met A naar beneden, stabiel.

Voor $x_1 > x > x_3$ wordt weer een quasi-stabiel evenwicht verkregen als bij $x > x_2$ uiteengezet is.

Voor $x \leqq x_3$ is de toestand, met A naar boven, stabiel.

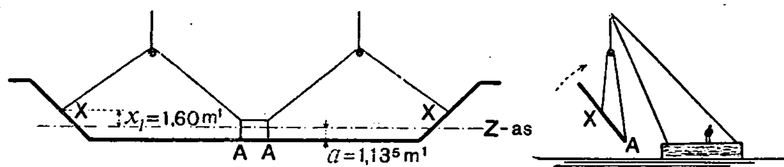
B. $l = 8a$:

Als voor A., slechts vallen de punten x_1 en x_2 samen.

C. $l < 8a$:

Voor $x > x_3$ is steeds quasi-stabiel evenwicht aanwezig.

Voor $x \leqq x_3$ is de toestand, met A naar boven, stabiel.



Figuur 4

3. *Het stelsel in de praktijk.*

Het probleem deed zich voor bij het leggen van een plaatstalen zinker, waarvan het montageschema in fig. 4 is voorgesteld. De zinker werd vlak drijvend aangevoerd, en door twee drijvende bokken uit het water opgetrokken. Daar de grote U-vormige buis in geen geval in omgekeerde toestand, met de beide uiteinden omlaag, mocht komen te verkeren, werden kabellengten en bevestigingspunten X nauwkeurig berekend.

Bij de zwaartepuntsafstand $a = 1{,}135$ m^1 en $l = 16{,}00$ m^1 (a en l stellen dan de in de rechterafbeelding van fig. 4 geprojecteerde lengten voor), werd met (1) berekend:

$$x_1 = +1{,}60 \text{ m}^1 \text{ en } x_2 = +12{,}13 \text{ m}^1.$$

De kabel kon dus in elk punt van de oplopende armen worden bevestigd, behalve binnen de zône van $x_1 = 1{,}60$ m^1.

Gezien met (2)

$$x_3 = +0{,}90 \text{ m}^1$$

wordt, blijkt de quasi-stabiele zône zich slechts over $160-90 = 50$ cm uit te strekken, m.a.w. ware het bevestigingspunt ca. 25 cm meer naar het zwaartepunt toe gekozen, dan zou het horizontale deel van de zinker naar boven kunnen zwaaien.

De uitvoering had, geheel naar verwacht was, een bevredigend verloop.

DIDACTISCHE REVUE

I. *Mathematica & Paedagogia*, Nummer 7, 1955—1956; België.

Opnieuw bevelen we gaarne dit lezenswaardige tijdschrift in de belangstelling van de abonné's op Euclides aan. Laten we de officiële mededelingen en de verenigingszaken buiten beschouwing, dan vinden we de volgende rubrieken: Culture mathématique, connaissance des élèves, enseignement, application des mathématiques, contacts, miettes, livres et revues, questions et problèmes.

In de eerste rubriek wijdt R. Debever een zestal bladzijden aan „*Albert Einstein* (1879—1955)", zijn persoon en zijn werk.

In de tweede geeft W. Servais in „*Présentation de la Caractérologie*" een uitvoerige schets van de temperamententheorie van Heymans en Wiersma en van de invloed, die de Groninger school op de Franse van Le Senne heeft gehad.

In de afdeling „Onderwijs" schrijft P. Libois over „*L'enseignement de la Géométrie et la Réalité*", M. Soens over „*Moderne Algebra in het M.O.*" Deze auteur wijst op de diepe kloof, die de traditionele wiskunde op onze scholen scheidt van de moderne wiskunde op de universiteiten onderwezen. Aansluitend aan een inleiding door Choquet gehouden op de Internationale Conferentie te Sèvres van februari 1955 gaat Soens na, op welke plaatsen het M.O. materiaal kan geven, dat aansluit op de moderne wiskunde. De volgende begrippen worden nader beschouwd: equivalentieklassen; vrije vectoren, glijdende vectoren en gebonden vectoren; orthogonaal projecteren op een vlak; restklassen; ringen; integriteitsgebieden; lichamen; unie en intersectie; isomorfisme tussen groepen. Enkele van de begrippen en werkwijzen uit de moderne wiskunde wil de auteur reeds in de hoogste klassen van het M.O. invoeren.

A. R. van Twembeke wijdt een waarderend artikel „*A propos d'une expérience réalisée aux Pays-Bas*" aan Bunt's schoolboek „*Van Ahmes tot Euclides*". Hij bepleit navolging in België.

P. Simon schrijft „*Application de l'équation focale au calcul des invariants*".

In de rubriek „Application des mathématiques" behandelt P. Germain „*Les grandes machines mathématiques*". De auteur

geeft een overzicht van de algemene principes, de inrichting en de toepassingen op het gebied der rekenmachines.

L. Carleer brengt verslag uit van de „*IXe rencontre internationale de professeurs de mathématiques*", die van 23 tot 31 augustus 1955 te Ramsau (Oostenrijk) gehouden werd.

La rencontre de Ramsau a montré une fois de plus l'importance des réunions de professeurs de mathématiques venant de différents horizons. Les participants (20 de sept nationalités différentes) ont en général fort apprécié les conversations individuelles aussi bien que les discussions collectives qu'ils ont pu avoir avec des collègues étrangers. Et ceci parce que la rencontre ne mettait pas le point final à un travail commencé de longue date, mais bien au contraire parce qu'elle a, d'une part, fait naître de nombreuses questions, dont la moindre n'est pas l'acquisition par les élèves de cette attitude de pensée particulière aux statistiques et que jusqu'à présent les maîtres ne possèdent en général pas eux-mêmes; et que, d'autre part, elle a rappelé de multiples problèmes toujours d'actualité, tels que celui du contact avec les enfants et adolescents.

Van Twembeke brengt verslag uit van „*Het Mac Leod Congres* 1955", waar prof. Dijksterhuis o.a. over Simon Stevin sprak.

In de boekbesprekingen vinden we een uitvoerige analyse van „*l'Enseignement des Mathématiques*", met bijdragen van Piaget, Beth, Dieudonné, Lichnerowicz en Gattegno.

In de laatste rubriek treffen we examenopgaven aan van de Université Libre de Bruxelles (1955), van het eindexamen der H.B.S. in 1955, en van de University of Cambridge.

II. *Bulletin* de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public; Publication trimestrielle; Musée Pédagogique, 29, rue d'Ulm, Paris (5e).

In een artikel „*Projets*" in het juninummer (no. 169) spreekt de nieuwe voorzitter van de A.P.M. (association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public) over de taak die aan het „Comité" en aan het „Bureau" in de vereniging is toebedeeld. „Il reste au nouveau Comité et au Bureau qu'il a désigné à agir de leur mieux pour faire progresser les effectifs de l'Association, apporter à nos collègues une information et une documentation intéressante . . . Le Bureau est particulièrement soucieux de développer la vie interne de l'Association. Pour cela, il portera tous ses soins à la publication du Bulletin, qui est notre lien et notre moyen d'ex-

pression . . . Nous travaillons à l'élaboration d'un programme et d'un calendrier dans l'espoir de faire de notre Bulletin un outil de travail utile à tous et peut-être plus particulièrement à nos jeunes collègues encore candidats aux concours de recrutement."

Het juninummer bevat de compte rendu van de assemblée générale van 29 mei 1955. Op deze vergadering werd o.a. de volgende wens geformuleerd t.a.v. de ophanden onderwijsherziening: „Un des objectifs de cette réforme doit être l'institution du travail dirigé supprimant le travail écrit à la maison et augmentant l'efficacité de l'enseignement".

Het octobernummer (57 blz.) bevat evenals de volgende nummers de rubrieken: la vie de l'association, informations et documents officiels, études, documentation, bibliographie, essais et variétés.

We noemen nog een artikel van W. Servais (België) „*Equations et lieux géométriques, synthèse logique*", van Mme L. Félix over de „*Initiation à l'analyse mathématique* par Bouligand" en een polemiek over „*La tyrannie des Mathématiques*".

Mme L. Félix schrijft in het decembernummer over „*L'enseignement de la statistique et de la probabilité*".

Het totale aantal bijdragen in elk nummer is aanzienlijk. De Nederlandse collega's wordt kennismaking met dit franse tijdschrift, dat thans opgenomen is in de Wimecos-leesportefeuille, aanbevolen. Men wende zich tot de heer G. Boost, Parklaan 107a, Roosendaal (N.Br).

III. *Mathematisch-Physikalische Semesterberichte*, Band IV, Heft 3/4, Göttingen 1955.

Van de 15 bijdragen uit dit 160 bladzijden tellende nummer noemen we de volgende:

a. „*Walter Lietzmann, zum 75. Geburtstage*" door P. Zühlke. De auteur schildert de organisatorische kwaliteiten van Lietzmann, die reeds op jeugdige leeftijd naast Felix Klein op de voorgrond trad in de I.M.U.K. Voorts de betekenis die zijn „Unterrichtswerk" en zijn vele didaktische geschriften voor school en leraar op het onderwijs hebben uitgeoefend. Sehr nachdrücklich hat sich Lietzmann jahrelang dafür eingesetzt, eine allgemeinverständliche mathematische Literatur zu schaffen, insbesondere in seiner „Mathematisch-Physikalischen Bibliothek". Andere Schriften aus Lietzmanns Feder bringen Licht in mathematische Erscheinungsformen der Früh- und Urgeschichte, in die Entwicklung der „Mathematik der

Alten", in die Beziehungen zwischen Mathematik und bildender Kunst, usw. In einigen seiner Schriften hat Lietzmann den fruchtbaren Wechselbeziehungen zwischen der Mathematik und Nachbargebieten nachgespürt, wie etwa der Philosophie, Erkenntnistheorie, Psychologie, Leistungsbeurteilung, Statistiek, usw.

b. H. Hermes schrijft een artikel naar aanleiding van de 70ste verjaardag van Heinrich Scholz, hoogleraar in de philosophie te Münster.

c. A. Kratzer, „*Fünfzig Jahre Relativitätstheorie*".

d. W. Fucks, „*Theorie der Wortbildung*". Die Aufgabe dieser Arbeit ist es, das mathematische Gesetz herzuleiten, das die Bildung der Wörter aus Silben beherrscht. Es wird sich zeigen, dass die Aufgabe lösbar ist und dasz wir annehmen dürfen, dasz die Formel, zu der unsere Untersuchung führt, den Prozesz der Wortbildung für alle Sprachen, welche Wörter aus Silben aufbauen, allgemein beschreibt.

e. H. Röhrl geeft „*Ein Bericht über N. Bourbaki: les structures fondamentales de l'analyse*". Eine Gruppe französischer Mathematiker unter dem Pseudonym N. Bourbaki hat sich die Aufgabe gestellt, die Grundlehren der heutigen Mathematik nach der axiomatischen Methode systematisch aufzubauen. Dabei soll jeder Begriff in grösztmöglicher Allgemeinheit eingeführt werden und aus wenigen fundamentalen Strukturen die gesamte Mathematik entwickelt werden. Eine Struktur ist gekennzeichnet durch ihr Axiomensystem. Man wird eine Struktur als fundamental ansprechen, wenn einerseits ihr Axiomensystem verhältnismässig wenig Axiome enthält — das sichert ihr die Allgemeinheit — und sie andererseits in vielen Teilgebieten der Mathematik in Erscheinung tritt. Als Beispiele seien die Gruppenstruktur und die Struktur eines topologischen Raumes erwähnt. Aus diesen fundamentalen Strukturen, von H. Behnke als „Mutterstrukturen" bezeichnet, gewinnt man durch Hinzunahme neuer Axiome die speziellen Strukturen. Diejenigen mathematischen Theorien, welche üblicherweise in den Anfängervorlesungen behandelt werden, wie Differential- und Integralrechnung und Analytische Geometrie, besitzen ein zu umfangreiches Axiomensystem, als dasz sie an die Spitze der Bourbakischen Aufbaues der Mathematik treten könnten: benötigt man doch schon, um in einer bestimmten Weise die reellen Zahlen charakterisieren zu können, den Körperbegriff, den Begriff der vollständig geordneten Menge und den Begriff der beschränkten Vollständigkeit. Struk-

turen dieser komplizierten Bauart werden nicht zu den Mutterstrukturen gezählt.

f. G. Pickert, „*Ein neuer Vorschlag für die Anfängervorlesung über analytische Geometrie*". Wesentlich neue Punkte: axiomatischer Aufbau und weitgehend beliebiger Skalarbereich.

g. H. Behnke und G. Hasenjaeger, „*Gilt* 12 : 2 . 3 = 18 *oder* 12 : 2 . 3 = 2?" *Zur Symbolik in der Mathematik*.

De auteurs concluderen: Es genügt festzustellen, dasz für den Fall $a : b . c$ keine Konvention existiert bzw. allgemein anerkannt ist. Dieser „Ausdruck" ist also im Sinne der eben geschilderten Auffassung nicht zweideutig, sondern gewissermassen nulldeutig, und damit die Aufgabe 12 : 2 . 3 = ? unlösbar, da keine der beiden Möglichkeiten (12 : 2) . 3 bzw. 12 : (2 . 3) ausgezeichnet ist.

h. M. Pinl, „*Warum messen wir in der euklidischen Geometrie Winkel durch transzendente Funktionen, Längen jedoch durch algebraische Funktionen?*"

i. R. Stender gaat in „*Mathematische Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung*" na door welke oorzaken dit gebied in het buitenland beter tot zijn recht komt dan in Duitsland. Vervolgens onderzoekt hij langs welke wegen de statistiek de scholing van het denken kan bevorderen. Hij bespreekt de wiskundige grondslag van het vak.

j. A. Bauer, „*Die Sätze von Pascal und von Brianchon*".

IV*a*. *Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht*; 8. Band, 4. Heft, 1 Sept. 1955, Bonn/Rhein, Frankfurt/M.

Dit nummer is bijna geheel aan Chemie en Physika gewijd. Achterin bevinden zich echter nog de urentabellen met toelichtingen aan de ministerpresidenten en aan de ministers van onderwijs in de diverse bondslanden verzonden door de „*Arbeitsgemeinschaft Deutsche Höhere Schule*". Voor het „Altsprachliche Gymnasium", het „Neusprachliche Gymnasium" en het „Naturwissenschaftliche Gymnasium" zijn de uurtotalen opvolgend 34, 37 en 43, op een totaal van 298, 291 en 285 voor 9 jaren. De verdeling van de klassen is: 5, 5, 4; 5, 5, 5; 5, 5, 4. Tegelijk heeft de onderwijsminister in Baden-Württemberg zijn reformplannen ter discussie gesteld. Hierin is het urentotaal 38 (bij een principiele 30-urige werkweek).

IV*b*. *Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht*, 8. Band, 5. Heft, 1 Oktober 1955; Bonn/Rhein, Frankfurt/M.

a. H. Paal, *„Natur- und Geisteswissenschaft am Morgen des Atomzeitalters"*.

b. B. Molewski, *„25 Jahre Kolbenprobermethoden"*, eine Rückschau über messende Versuche im naturwissenschaftlichen Unterricht.

c. W. Moller, *„Mikroprojektion mit dem Schulmikroskop"*.

d. J. Groeneveld, *„Quantitatieve Messungen mit Staubfiguren"*, Dieser Bietrag beschreibt Geräte zur Messung kurzer Zeitintervalle, zur Registrierung von Bewegungsvorgänge und zur Frequenzmessung.

e. G. Ch. Hönig, *„Bestimmung des Rauminhalts eines Kugelabschnittes mit Hilfe von Prisma und Kegel"*. Die im heutigen Schulunterricht gebräuchliche Herleitung des Rauminhalts einer Kugel mit Hilfe von Zylinder und Kegel ist nach Tropfke, Geschichte der Elementarmathematik, zurückzuführen auf ein Verfahren, das Chr. v. Wolff in seinen Elementa (1717) in Anlehnung an Cavalieris Indivisibeln (1635) entwickelt hat. Weiteste Verbreitung brachten Baltzers Elemente (1860). Im Anschluss hieran wird der Rauminhalt eines Kugelabschnittes aus der Differenz der Rauminhalte eines Zylinders und eines Kegelstumpfes gewonnen. Die bei deisem Vorgehen nötige Rechnung, zumal wenn die Höhe des Kugelabschnittes grösser als der Kugelhalbmesser ist, fällt fast ganz weg, wenn wir, wie der Autor zeigt, statt Zylinder und Kegelstumpf ein Prisma und ein Kegel benutzen. Zugleich wird hierbei erkannt, dasz jedem der beiden Glieder in der Differenzschreibweise der Formel für den Kugelabschnitt eine einfache räumliche Deutung gegeben werden kann.

f. R. Lauffer, *„Der Korbbogen"*. Die Grundaufgabe über Korbbogen lautet: die Linienelemente (P_1t_1) und (P_2t_2) sind durch einen zweiteiligen Korbbogen, d.h. durch eine zweiteilige Folge von Kreisbogen mit tangentiellem Übergang, zu verbinden.

g. Th. Lambacher, *„Zur Konstruktion des Näherungswertes von Archimedes"*.

IVc. *Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht*, 8. Band, 6. Heft, November 1955; Bonn/Rhein, Frankfurt/M.

a. M. Wagenschein, *„O fehlte doch immer die Macht, wo die Einsicht fehlt!"* Aus Georg Christoph Lichtenbergs physikalischen Schriften ausgewählt und in die Form eines Gespräches mit einem heutigen Ausfrager gebracht.

b. Th. Morschheuser, „*Umkehrung einer Funktion*". Der mathematische Begriff der Umkehrung ist ein fruchtbarer Begriff. Es begegnet uns zuerst beim Aufbau der Rechnungsarten. Addieren, Multiplizieren, Potenzieren stocken das mathematische Gebäude auf, und ihre Umkehrungen bauen es in die Breite aus und geben Anlasz zur Einführung neuer Zahlenarten. In der Geometrie ergibt die Umkehrung eines Lehrsatzes (unter Umständen) einen neuen Satz; das Bemühen, seine Richtigkeit zu zeigen, führt zu einer neuen Methode des Beweisens, dem indirekten Beweis, der wieder den Zusammenhang von Ausgangssatz und Umkehrung in helles Licht rückt. Aufs neue erweist unser Begriff seine Zusammenhänge, seine aufdeckende und weiterführende Kraft bei der Lehre von den Funktionen. Während aber über die beiden ersten Bedeutungen von „Umkehrung" kaum Unklarheiten in Fassung und Darstellung bestehen, ist es nicht so mit dem Begriff der „Umkehrung einer Funktion".

c. H. Keefer vervolgt zijn artikel: „*Tarifgrössen, Dimensionen uns Mass-Systeme mit Anwendungen für den Unterricht*".

d. A. Siebel, „*Rationale Kreisberechnung nach Luckey–J. Hofmann*".

e. H. Schlee, „*Zur Behandlung der Kugelgeometrie auf der höheren Schule*". Der Grundgedanke des Verfahrens ist folgender: Ist die Projektion irgendeines Kugeldreiecks gegeben, so wird die Kugel „als Ganzes" soweit gedreht, dasz diejenige Ecke des Kugeldreiecks in den Projektionsmittelpunkt fällt, von der man Näheres wissen will. Man kann dann sofort alle bei ihr liegenden Winkel in wahrer Grösze ablesen und alle von ihr ausgehenden Strecken, die ja auf geraden Radien liegen, durch Umklappen in den Projektionsumrisz bestimmen.

f. G. Thoms, „*Die elementare Herleitung der Lorentz-Transformationen*".

g. Fr. W. Pfersdorff herdenkt de op 3 juli 1955 op 83-jarige leeftijd overleden *Prof. dr. Wilhelm Lorey.*

Va. *The Mathematical Gazette*; Vol. XXXIX, no. 329, September 1955; London.

a. W. V. D. Hodge, „*Changing views of geometry*", presidential address to the Mathematical Association, 14th April 1955. Referring to an address provided by Professor Hardy (1925 „What is geometry?") the author sais in 1925 geometry was going through a bad

period, when many geometers were themselves confused about their objectives, and some other mathematicians were prepared to throw it out of the mathematical curriculum altogether. In 1925, geometry was suffering from a temporary exhaustion. The great nineteenth century geometers had created the vast edifice of projective geometry and had shown its relation to the older Euclidean geometry, and the general concept of geometry had been codified in Klein's Erlanger Program. According to Klein's point of view, a geometry is a system of definitions and theorems which express properties invariant under a group of transformations. Thus Euclidean geometry is concerned with invariants of the group of Euclidean movements, and projective geometry deals with the invariants of the group of collineations. The most significant advance in geometry between the Erlanger Program and 1925 was the development of birational geometry, particularly the theory of surfaces which we owe to the Italian school. The tyranny of the Erlanger Program has not yet finally disappeared, but I am prepared to say that its days are numbered.

The author describes a geometry as the study of a space with a structure. He does not care whether a geometer proceeds to work directly from axioms or prefers to work with an algebraic representation. Modern mathematics is turning more and more to axiomatic methods. What he, as a professor of geometry, wants to see in young men entering the university is not any great ingenuity in solving tricky problems, but a thorough understanding of what geometry is about, and a sound, if elementary knowledge of the techniques required.

b. *The Mathematical Association, report of the council for the year* 1954. Aantal leden 2592; contributie 21 shilling per jaar; inkomsten £3770; het tijdschrift Mathematical Gazette 320 blz. per jaar, 5 afleveringen; er is een Teaching Committee dat dit jaar uitgaf: „*Report on the use of visual methods in mathematics*".

c. R. J. Gillings, „*The oriental influence on Greek mathematics*". As time goes by, and more mathematical texts are translated, one does not doubt that the debt which the Greeks owed to the Babylonian culture of over 1000 years earlier will be shown to be greater than has hitherto been thought.

d. P. Gant, „*When is a parallelogram not a parallelogram?*" Deze bijdrage handelt over vierhoeken met een paar overstaande gelijke zijden een en paar overstaande gelijke hoeken.

e. N. W. McLachlan, „*Two theorems on ordinary non-linear differential equations*".

f. P. Steyn, „*A numerical solution of* $\frac{d^2y}{dx^2} = F(x)$".

g. G. N. Watson, „*Schur's inequality*".

h. *Mathematical Notes and Reviews*, 56 bladzijden.

V*b*. *The Mathematical Gazette*, Vol. XXXIX, No. 330, December 1955; 96 blz.; London.

Buiten 56 blz. „Mathematical Notes" en „Reviews" bevat deze aflevering de volgende artikelen:

a. D. M. Lee, „*Diagnostic and remedial work in arithmetic*";

b. H. Kestelman, „*Finite rotations of a rigid body*";

c. G. N. Watson, „*Two more Tripos questions*";

d. W. H. McCrea, „*On Newtonian frames of reference*";

e. I. J. Good, „*On the marking of chess-players*".

VI*a*. *Elemente der Mathematik*, Band X, Nr. 5, 10. September 1955, Basel.

a. H. P. Künzi schrijft een artikel „*Zum 60. Geburtstag von Rolf Nevanlinna*", de Finse geleerde die o.a. „*Eindeutige analytische Funktionen*" schreef. „Wissenschaftlich hat sich der Schöpfer der modernen Wertverteilungslehre nach dem Erscheinen der eindeutigen Funktionen in vermehrtem Masse dem Studium der Riemannschen Flächen sowie den damit zusammenhängenden potentialtheoretischen Fragen zugewandt. Untersuchungen über das Dirichletsche Problem und das alternierende Verfahren führten zu neuen Ergebnissen in der Theorie der offenen Riemannschen Flächen. Auch hier, wie bei den meromorphen Funktionen, erwiesen sich die Nevanlinnaschen Ideen als bahnbrechend."

b. Ernst Trost schrijft over het „*Symposium zur Erinnerung an Henri Fehr*" (Genève, 1—2 Juli 1955), waar o.a. Piaget, Bundgaard, Behnke, Freudenthal, Maxwell, Kurepa, Frostmann en Desforge spraken. Tevens wordt verslag uitgebracht van de vergadering van de Executieve van de C.I.E.M., waar het werkprogramma voor de periode 1954—1958 werd vastgesteld.

VI*b*. *Elemente der Mathematik*, Band X, Nr. 6, November 1955; Basel.

a. G. de Rham schrijft een artikel ter nagedachtenis van *Gustave Dumas*.

b. H. Hadwiger: „*Volumschätzung für die einen Eikörper überdeckenden und unterdeckenden Parallelotope*".

c. A. Heppes: „*Über mehrfache Kreislagerüngen*".

d. R. Kurth: „*Verallgemeinerung eines elementaren Satzes von Laplace*". De bedoelde stelling luidt: Es sei ein System von drei nicht kollinearen gravitierenden Massenpunkten gegeben. Darin gehen die Kräfte, die je zwei Massenpunkte auf den jeweiligen dritten ausüben, durch ein und denselben Punkt, und dieses Kräftezentrum fällt dann und nur dann mit dem Massenmittelpunkt zusammen, wenn die Massenpunkte auf den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks liegen. Aangetoond wordt een veralgemening voor centrale krachten.

e. K. Wanka: „*Die Konfiguration des Pascalschen Sechsecks*". De bijgevoegde figuren bevatten bijna alle Pascalse punten en rechten, Kirkmanse en Steinerse punten, en een deel der rechten van Steiner, van Cayley en die punten van Salmon.

f. De redactie schrijft over de belangstelling die de opgavenrubriek en de rubriek „*Ungelöste Probleme*" ook in het buitenland ondervinden en opent een nieuwe rubriek. Unter dem Titel „*Aufgaben für die Schule*" werden wir in jedem Heft in der Regel fünf Aufgaben bringen, die unmittelbar für den Unterricht bestimmt sind. Wir hoffen damit einem Bedürfnis der Lehrerschaft entgegenzukommen. Es sollen Aufgaben aus verschiedenen Gebieten der Schulmathematik, meistens mit den Lösungen versehen, als Anregung für den alltäglichen Unterricht geboten werden.

VII*a*. *School science and mathematics*; volume LV, number 7, whole 486; October 1955; Oak Park Ill, (U.S.A.)

a. D. V. Mitchell, "*Endless Numbers*" (*repetends*). In computing a table of decimal equivalents of common fractions ($1/2$ to $^{99}/_{100}$), accurate to any desired number of decimal places, it is necessary to freely employ the properties of repetends (recurring decimals) which have not been shown in elementary mathematics in the U.S.A. for over 100 years. What they are and how they operate becomes increasingly evident in the construction of the tabulation progresses.

b. J. E. Slaughter, "*Mathematics and money*". The author listes some suggestions for mathematics teachers who wish to provide experiences in the use of money for their pupils.

c. D. L. Lewis, "*The decimal point in slide rule calculations*".

d. L. H. Lange, *"Mathematical thought for to morrow"*. Giving an introduction to the study of calculus.

e. R. E. Randall, *"Experimental study on the teaching of scientific thinking"*.

f. V. L. Johnson, *"Proof in addition by lateral addition"*. The author tries to sound the praises of the proof by nines.

g. C. B. Read, *"A style form guide for typewritten mathematical manuscripts"*. This guide has been prepared with the idea that it might be helpful to those typing mathematical copy which in many cases will never appear in print. In its preparation, material in the references cited was used when applicable, and a study was made of current practice in printed texts and periodicals.

VII*b*. *School Science and Mathematics*, Volume LV, number 9, whole 488, December 1955; Oak Park, Ill. (U.S.A.).

Van de wiskunde-artikelen uit dit nummer noemen we:

a. A. Porges, *"Solution of the quadratic by hyperbolic functions"*.

b. J. Satterly, *" The Morley triangle and others triangles"*.

c. A. H. Luehman, *"Science and mathematics for today's youth"*.

d. M. A. Laframboise, *"High school courses in mathematics"*.

VII*c*. *School Science and Mathematics*, Volume LV, number 8, whole 487, November 1955; Oak Park, Ill. (U.S.A.).

a. A. L. Hess, *"The place of geometric constructions in plane geometry"*.

Many writers have insisted that straight edge and compasses constructions ought to be given an important place in plane geometry. Other writers have been equally insistent that constructions with straightedge and compasses have no direct bearing on geometry as now taught or on the development of geometry in general, and that constructions are not an essential part of a proof. By a careful study of fourteen textbooks the author has made an attempt to determine the place of constructions in plane geometry.

b. W. D. Reeve, *"How to choose a textbook"*.

One of the most important things a teacher needs to consider is the choice of a textbook. This is far more important than many teachers realize. Little care is shown in many schools in this respect and the

students pay the penalty, because the choice of a textbook is something in which the students are vitally concerned. No particular textbook can be said to exhibit all the virtues, but there is coming to be a class of books, well constructed and modern in spirit, to which the intelligent teacher can turn if he has a fair set of criteria for making a choice and if, as is often not the case, he is permitted to choose his own text.

The list of points to be observed in the choice of a textbook, as set forth in this article, is the result of the combined judgments of a large number of experienced teachers and may therefore be looked upon as at least fairly authorative and representative.

c. J. W. Renner, *"Course patterns in mathematics studied by high school students"*.

d. D.G.Schubert, *"Formulas for better reading in mathematics"*.

e. E. A. Habel, *"Confusion resulting from duplication of symbolism and definitions in mathematics"*. The opinion is widely held that the deficiencies of college freshmen with mathematics are primarily a result of lack of understanding of requisite mathematical concepts. Research by the author seems to indicate that in many instances failure to understand simple mathematical notation is also the source of much error and that the fault lies not alone with the teacher and student but in part with the structure of mathematics and the textbooks which expound it.

VIII. *The Mathematics Teacher*; Volume XLVIII number six; October 1955; Menasha, Wisconsin, U.S.A.

a. E. P. Northrop, *"Modern mathematics and the secondary school curriculum"*. The author underlines the current dissatisfaction with the high school curriculum and, at the same time, offers a few pointers for the next steps to be taken.

The lively modern development of mathematics has had no impact on the contents or on the presentation of modern school mathematics. The most radical proposals involve little more than the pruning of deadwood like solid geometry to make way for live but nevertheless conventional growths like analytic geometry, or calculus, or statistics. Whether viewed from the standpoint of proper cultivation and utilization of our intellectual resources generally, or from the standpoint of increasing our scientific potential, or from

the standpoint of meeting the growing demand for science teachers, the need for a secondary school mathematics curriculum relevant to modern mathematics and science is clear.

b. P. R. Neureiter, "*Where the mathematics teacher is king*". This note about teaching in the Netherlands supplies information enabling readers to make some interesting comparisons with the work they are doing in mathematics. The author had the occasion to spend a year in the Netherlands under the Fulbright Program, teaching in the public schools and studying the school system of the Netherlands. He found that the exalted position of mathematics in the schools for the selected minority contributes to a very high regard for mathematics in the other kinds of schools, so that in all branches of the highly diversified and specialized system a considerable proficiency in mathematical operations is required of every youngster who wants to earn any kind of school diploma and aims to qualify for a job outside the unskilled labor category. The writer noticed a high degree of standardization in the methods of instruction, probably the result of the central control exercised by the Ministry of Education. He gives a sampling of problems actually given on examinations in recent years, two problems on arithmetic set on an entrance examination, three from the comprehensive finals in the "advanced elementary school", and four from the final examination in the H.B.S. (Algebra 1951[I,II] and Trigonometry 1951[I,II]).

c. R. C. Maul, "*Where do eligible mathematics teachers go?*" A timely report on a most pressing problem, the shortage of competent elementary school teachers and the shortage of high school teachers, especially in the scientific fields.

d. Fr. G. Lankford jr., "*Practical mathematics is challenging to students*". Many students like to know that the mathematics they must study can be used; however, practical problems must be wisely selected to be of interest to students. The applications used should be real ones. They must be within the reasonable comprehension of students. Some regard must be given to maturity and interest of students. The mathematics involved should be clearly indicated. Teachers need equipment and supplementary references in order to use many applications of mathematics to stimulate students. The evaluation of the learning of the pupils must test their ability to solve some applied problems.

e. M. F. Willerding, "*A readiness program for finding volumes by integration*".

f. W. D. Reeve, *"What should be the nature and content of junior high school mathematics?"*

g. W. L. Schaaf, *"Memorabilia mathamatica"*: Maker of universes; the abacus and the brain.

h. M. F. Rosskopf, *"What makes a good textbook review?"*

i. N. Clark, *"Challenge to the gifted"*.

IX*a*. *Paedagogische Studiën*, Twee-en-dertigste jaargang, negende aflevering, september 1955; J. B. Wolters - Groningen, Djakarta.

a. S. Wiegersma en J. Halffmann, *„De waarde van een schriftelijke testserie voor selectie bij de toelating tot het lager technisch onderwijs"*.

Het probleem dat de auteurs zich stellen is niet na te gaan of de testserie een prognose mogelijk maakt over de prestaties van de afzonderlijke leerlingen in de eerstvolgende jaren, maar wel of de beoordeling van de testprestaties een beoordeling van de prestaties in het onderwijs mogelijk zullen maken. De test wordt in principe bruikbaar geacht om een prognose te geven over de prestaties van bepaalde groepen van leerlingen.

De auteurs komen tot de conclusie dat de test ondanks alle tegenwerkende invloeden een aantoonbare selecterende werking heeft. De onderstelling dat allereerst negatieve selectie mogelijk zou zijn blijkt onjuist. Er is een positieve selectie op grond der testprestaties mogelijk.

b. Drs. K. Rijsdorp, *„Het probleem van de prestatie in de opvoeding"*.

IX*b*. *Paedagogische Studiën*, Twee-en-dertigste jaargang, tiende aflevering; october 1955, J. B. Wolters - Groningen, Djakarta.

a. P. M. van Hiele schrijft over *„De niveaus in het denken, welke van belang zijn bij het onderwijs in de meetkunde in de eerste klasse van het V.H.M.O."*. Hij zegt, dat iemand een bepaald niveau in het denken bereikt heeft, als een nieuwe denkordening ten opzichte van zekere operaties hem in staat stelt deze operaties op nieuwe objecten toe te passen. Hij brengt drie niveaus ter sprake:

a. een eerste niveau, dat bereikt is, indien de leerling in staat is hem bekende eigenschappen van een hem bekende figuur operatief toe te passen;

b. een tweede niveau, dat bereikt is, indien de leerling in staat is hem bekende relaties tussen hem bekende figuren operatief toe te passen;

c. een derde niveau, dat bereikt is, indien de leerling in staat is tot het opereren met, het vergelijken en omzetten van relaties.

Het is heel goed mogelijk een goed cijfer voor wiskunde op het eindexamen te halen zonder dat men dit derde niveau bereikt heeft. Er blijkt uit, dat het eindexamen geen voldoende prognose geeft voor een verdere studie in de exacte vakken.

De auteur acht het niet zeker, dat alle normale leerlingen het tweede niveau in het eerste jaar zullen behalen. Hij signaleert het gevaar, dat hierdoor leerlingen aan het eind van de cursus worden afgewezen, terwijl ze aan het eind der daaropvolgende grote vacantie wel geschikt zouden blijken te zijn!

b. Dr. J. Koning geeft „*Een functieanalyse van de schoolleiding bij het V.H.M.O.*" Het is voor de eerste maal dat in Nederland een onderzoek over deze materie wordt gepubliceerd. Het hoofdprobleem van een schoolleider is de bevordering van een efficiënte instructie. Een handleiding hierover zou men kunnen verwachten in de rubriek „Algemene Didactiek", waarover in Nederland wel enkele artikelen geschreven zijn, maar niet vanuit de praktijk. De schoolleider zal na er kennis van genomen te hebben, nog hoofdzakelijk op zijn intuïtie zijn aangewezen. Behalve het bevorderen van een efficiënte instructie is ook het wetenschappelijk doordenken ervan, de toetsing der conclusies aan de praktijk en het opnieuw bestuderen van de resultaten der toetsing taak van de schoolleider. Deze behoort leider te zijn van de paedagogisch-didactische research aan zijn school. Hierin blijft echter vrijwel iedere rector of directeur in gebreke. Dit mag men hem niet verwijten, het is een gevolg van de opbouw van ons Nederlandse schoolsysteem, dat zó is opgebouwd, dat er slechts weinig aandacht is besteed aan de topfuncties.

Als methoden voor een functie-analyse van de schoolleiding komen in aanmerking:

a. het nagaan van de gebruikelijke opvattingen van de functie van rector en directeur;
b. de bestudering van de reglementair vastgelegde instructies van rectoren en directeuren;
c. een onderzoek van de bezigheden door een schoolleider gedurende enige maanden verricht en een rangschikking van deze bezigheden;
d. het concipiëren vanuit een centrale visie van de opdracht van een

schoolleider en het bepalen van zijn functies vanuit deze visie.

De auteur past in zijn onderzoek de methoden a, b en c toe. Zijn proeve tot een empirische taakomschrijving bevat voor de schoolleider een 13-tal rubrieken met een 80-tal ondertitels. Met klem wordt de Nederlandse leraar aangeraden van deze waardevolle analyse, gevolgd door een aantal desiderata t.a.v. de Nederlandse schoolorganisatie, kennis te nemen.

IX*c*. *Paedagogische Studiën*; Twee-en-dertigste jaargang, elfde aflevering; november 1955; J. B. Wolters - Groningen, Djakarta.

E. Velema, „*Over de verhouding van paedagogiek en sociologie*". Tot dusver ontbreekt het aan een bewuste terreinverkenning tussen de beide in de titel genoemde wetenschappen. De auteur wenst de vaagheid en de romantiek t.a.v. de relaties tussen opvoeding en onderwijs enerzijds en de maatschappij anderzijds te boven te komen en wil daartoe uitgaande van de disciplines der paedagogische wetenschap nagaan in hoeverre de sociologische categorieën bruikbaar zijn voor de verheldering van de vraagstukken uit het bedoelde problemenveld. Anthropologisch en empirisch heeft de paedagogiek in laatste instantie te bepalen wat van de sociologie mag en kan worden aanvaard.

De auteur bespreekt historische opvattingen over het verband tussen opvoeding en onderwijs en de maatschappij (Karl Marx, Emile Durkheim, Karl Mannheim), de betekenis van de sociologie als tweede hulpwetenschap voor de paedagogiek (de psychologie is de belangrijkste hulpwetenschap) en de grenzen der sociologie.

Ir. J. Zuidweg schrijft: „*Tegen leerplicht — voor leergelegenheid*".

IX*d*. *Paedagogische Studiën*, Twee-en-dertigste jaargang, Twaalfde aflevering, december 1955; J. B. Wolters - Groningen, Djakarta.

a. Dr. D. M. Lee van het Institute of Education van de University of London geeft een instructief, kritisch overzicht van de "*English Comprehensive Schools*", dat men kan beschouwen als een waardevolle inleiding tot het rapport van een Nutscommissie over het gelijknamige onderwerp. In de inleiding tot het artikel van dr. Lee wordt aangekondigd dat de eerste schoolgemeenschap in Nederland die op ongeveer dezelfde principes zal berusten als de Engelse, reeds in 1956 in ons land tot stand zal komen.

b. J. Jonges schrijft „*Over de verhouding van de psychologie tot de didactiek*".

IX*e*. *Paedagogische Studiën*, Drieëndertigste jaargang, Eerste aflevering, januari 1956; J. B. Wolters - Groningen, Djakarta.

a. Dr. H. Nieuwenhuis, „*Specialisatie en algemene vorming*", oorspronkelijk als lezing gehouden aan de Landbouwhogeschool te Wageningen in het kader van het „Studium Generale".

b. Dr. Ph. J. Idenburg, „*Opvoeding en onderwijs in deze tijd*".

JOH. H. WANSINK.

TERRA INCOGNITA

door

D. DE VRIES.

Met de kennis van het onmetelijke rijk der getallen is het wel zeer eigenaardig gesteld.

Enerzijds behoort de abstracte getallenleer tot de zwaarste delen der wiskunde, waartoe slechts de bekwaamste wiskundigen toegang hebben. De meesten van hen bewegen er zich aarzelend; wie durft beweren er zich werkelijk thuis te gevoelen? Steeds liggen in schuilhoeken waar nog niemand een voet kon zetten, geheimen op hun oplossing te wachten.

Anderzijds voert ieders weg dagelijks over een heel klein stukje van dit gebied, over een hoekje waar de wetten gelden van de vier hoofdbewerkingen der rekenkunde: de optelling, de aftrekking, de vermenigvuldiging en de deling. De kennis van de meesten reikt niet verder. Sommigen gebruiken in hun werk nog twee andere bewerkingen, de machtsverheffing (tot de tweede macht) en de(vierkants-) worteltrekking. Laat het stukje grond waar slechts deze wetten gelden Cijferland heten. Iemand die zich hier weet te bewegen, doch meent dat er buiten deze kennis op het gebied van rekenkunde en getallenleer geen dingen van belang zijn te beleven, bevindt zich, van wiskundig standpunt uit beschouwd, toch nog maar in het land der blinden. Met een koning Eenoog uit dit land zullen wij aanstonds kennis maken.

Het Cijferland wordt door bijna iedereen bereisd. Maar terwijl in onze tijd kaarten en gidsen het reizen in alle opzichten overzichtelijker en eenvoudiger hebben gemaakt, geschiedt het reizen zonder mechanische hulpmiddelen in Cijferland nog steeds zonder behoorlijke kaarten, in het wilde weg. Vaak verdwaalt men er, en de meesten hebben een zekere angst er te toeven. Zijn er dan geen geschikte reisbureaus die de mensen de nodige voorlichting kunnen verschaffen? Om het eens zonder beeldspraak te zeggen: ieder heeft in de dagelijkse praktijk te rekenen, slechts weinigen weten rekenwerk duidelijk, langs de kortste weg, goed gecontroleerd uit te voeren. Hoe komt dat toch? Het antwoord is direct te geven: op de scholen, welke dan ook, wordt het gewone cijferen schromelijk ver-

waarloosd. Vandaar, dat alles wat met rekenen in verband staat door de meesten wordt geschuwd. Men voelt zich onwennig tussen cijfers en verkeert meestal in het onzekere of de uitkomsten zijn te vertrouwen.

Zo kan het gebeuren dat enkele eenvoudige regels die eigenlijk ieder reeds op de lagere school zou hebben moeten leren, als verbluffende openbaringen worden ontvangen. Zo kon het gebeuren dat een zekere Ing. J. Trachtenberg bij zijn verblijf in gevangenkampen (22 stuks!) tijdens de jongste wereldoorlog de tijd ging korten met cijferwerk, waarbij hij methoden opspoorde die hijzelf voor nieuwe ontdekkingen aanzag, maar die al eeuwen oud waren. Het betreft de bekende kruisvermenigvuldiging met de toepassing daarvan op machtsverheffing, deling en worteltrekking. De bevrijding bracht hem naar Zwitserland en daar gaf hij in 1945 een brochure uit: *Lehrbuch des praktischen Schnellrechnens für jedermann, nach neuartigem, umwälzendem System*, voorzien van een opgeblazen „Vorwort", waarin hij zich de kroon opzet en de koningsmantel omslaat. Luister naar de woorden van deze koning Eenoog: „Das Ganze ist so von A bis Z das Ergebnis eigenen Nachdenkens und Erarbeitens" en verderop: „Meine eigene Methode, an deren Aufbau ich das volle geistige Eigentum beanspruche, was ich nötigenfalls auch eidlich zu bekräftigen bereit wäre . . .". Met dit geschetter poogt hij zichzelf blijkbaar te overstemmen, want even eerder staat te lezen, dat hij vlak voor het drukken van zijn „Lehrbuch" toch nog een paar regels uit een dik boek en een eveneens ongenoemde brochure onder ogen heeft gehad, die zaken aanroerden, die toch blijkbaar wel enigszins in de lijn van zijn publicatie lagen. Hoe het precies zit laat hij verder rusten; een ernstig onderzoek naar litteratuur op dit terrein heeft hij niet aangevat; al te vlug zou hij dan van zijn ontdekkingswaan zijn genezen. Zonder al te grote moeite zouden hem dan wel de volgende twee Duitse boekjes in handen zijn gekomen:

J. Bojko, *Lehrbuch der Rechenvorteile*, 2e druk, 1926 en P. Werkmeister, *Praktisches Zahlenrechnen*, 2e druk, 1929.

Dit zijn boekjes uit overbekende series; het eerste is door Teubner uitgegeven in de serie „Aus Natur und Geisteswelt", het tweede is een deeltje uit de „Sammlung Göschen". Verder zijn nog te noemen: L. Schrutka, *Zahlenrechnen*, 1923, en een eenvoudig schoolboek van K. Menninger, *Rechenkniffe*, 7e druk, 1942.

Kent onze schrijver geen van deze werkjes, of wil hij ze liever niet kennen?

Laat ons nu eens trachten na te gaan hoe nieuw de methode van de heer T. eigenlijk wel is. Voor mij ligt een boekje met de titel

Snelrekenkunde, vermenigvuldiging zoomede rekenkundige proeven, bij H. W. van Marle te Arnhem verschenen. In dit Nederlandse boekje uit 1887 wordt de vermenigvuldiging volgens de kruismethode duidelijk behandeld, de kruismethode die de eerste helft van T'.s brochure uitmaakt en die de grondslag vormt van de symmetrische deelmethode, die met de worteltrekking de tweede helft vult.

De bescheiden samensteller van het Nederlandse boekje noemt zijn naam niet; verwezen wordt naar een Italiaans boekje dat een tiental jaren eerder was verschenen: *Nieuwe methode eener symmetrische vermenigvuldiging,* enz. door E. Galatti (1878). In de inleiding tot het Nederlands boekje staat te lezen, dat de kruisvermenigvuldiging reeds door Leonardo van Pisa in diens Abacus (1202) werd geleerd. „De groote Pisaner heeft echter de vermenigvuldiging over het kruis slechts weergegeven als een uitvinding der Indiërs; immers de eerste sporen er van vindt men reeds in de 6e eeuw n.C. bij Brahmagupta, onder den naam: Vajrâbhyâsa (bliksemend)." (Cf.: Schrutka, *Zahlenrechnen,* p. 41).

Na de vermelding van de titel van het Italiaanse boekje begint het „Voorwoord" van de Nederlandse bewerking (?): „Door dit geschrift heeft Galatti de aandacht van het rekenend publiek gevestigd op een manier van vermenigvuldigen, die onverdiend reeds vele eeuwen in vergetelheid rustte. Volkomen erkennende dat hier sprake is van een belangwekkende arbeid, mag toch niet verzwegen worden, dat Galatti niet volkomen schijnt doorgedrongen te zijn in de geheimen dezer „eminente methode", zooals hij die zelf noemde, anders zou hij de vraag: „of een dergelijke rekenwijze ook bij de deeling in toepassing kon gebracht worden", niet met een beslist: „neen" beantwoord hebben".

Uit het vorenstaande blijkt voldoende duidelijk dat het werk van T., gepubliceerd in 1945, niet bepaald nieuw is. In de *Inleiding tot het praktisch rekenen* van 1941 door Ir. F. Harkink (tweede druk, 1949) is niet alleen de stof van T. geheel en al, en bovendien beter, behandeld, het boek bevat heel wat meer. Het is daarom hoogst bevreemdend, dat het „Nederlands Instituut voor Efficiency" een cursus in rekenen organiseert volgens het systeem van T., waarbij in een daarvoor uitgegeven prospectus met de gezwollen taal van de auteur de nieuwigheid weer met nadruk naar voren wordt gebracht.

Bij de bewerkingen, zoals T. ze aangeeft, moet men dezelfde berekeningen uitvoeren als volgens de werkwijze bij Harkink vermeld; alleen is er een klein verschil in het opschrijven van de tussenresultaten, dat is alles.

Een paar voorbeelden zullen dit overtuigend aantonen. Volgens Harkink schrijft men achter de vermenigvuldiging 8763 × 5492 zonder meer de uitkomst op; T. plaatst boven de factoren nog tussenresultaten in kleine cijfers.

```
         8 3       8 14 12
T.:      8 7 6 3 × 5 4 9 2 = 4 8 1 2 6 3 9 6.
```

Hetzelfde geldt natuurlijk voor het kwadrateren.

```
H.:      4 7 6 5 × 4 7 6 5 = 2 2 7 0 5 2 2 5.
         11 6 2    6 11 13
T.:      4 7 6 5 × 4 7 6 5 = 2 2 7 0 5 2 2 5.
```

Bij de deling ziet men ogenblikkelijk, ondanks een ietwat verschillende schrijfwijze, dezelfde tussenresultaten voor de dag komen; het kost geen moeite dit op te merken, omdat het verschil in de rangschikking van de cijfers daarvoor te gering is.

```
H.:      4 8 1 2 6 | 3 9 6 : 5 4 9 2 = 8 7 6 3
           8 1
           4 9
           1 4 2
             4 2
             1 2 6
               2 3
                 8 | 3 9 6
                         0

T.:    4 8 1 2 6 ′ 3 9 6 : 5 4 9 2 = 8 7 6 3
         81 142 126   8396
         49  42  23   8396
                      ----
                         0
```

De worteltrekking vertoont een zelfde beeld.

```
H.:      2 2 7 0 5 | 2 2 5 = 4 7 6 5
           6 7
           1 1 0
             6 1
             1 3 5
               5 1
               1 1 | 2 2 5
                         0

T.:      2 2 7 0 5 ′ 2 2 5 = 4 7 6 5
           67 110 135  11225
               61  51  11225
                       -----
                           0
```

Een „System Trachtenberg'', als iets nieuws, is hierin moeilijk te ontdekken, laat staan dat het woord „umwälzend'' hierop van toe-

passing zou zijn. Bij de uitvoering der bewerkingen krijgt men bij H. en bij T. telkens dezelfde kleine berekeningen, dus ook dezelfde tussenresultaten. En wat de uiteenzetting van de rekenwijzen aangaat, de korte beschrijving bij Harkink is veel raker dan de vermoeiend omslachtige omschrijvingen van Trachtenberg, die ons gestolen mogen worden. Hiervoor is zeker de typering van Wijdenes op z'n plaats: „tennissen met baggerlaarzen aan".

De kosten om dit oude nieuws via het N.I.V.E. aan te horen zijn niet gering: de prijs bedraagt voor zes (6) avondlessen — ze worden om de veertien dagen gehouden — maar even zestig gulden (ƒ 60,—).

T. meent Zwitserland met zijn rekenmethode een hele dienst te hebben bewezen. Als zijn (!) methode daar gemeengoed zal zijn geworden, „so statte ich damit nicht zuletzt der Schweiz, die den Flüchtling aufnahm, meinen Dank ab und trage vielleicht zur Bestätigung der Tatsache bei, dass mancher Flüchtling auch diesmal, wie in früheren Jahrhunderten, das Geistesleben seines Asyllandes zu befruchten imstande ist".

Zou zulke daverende, holle humbug toch werkelijk onmisbaar zijn, om in brede kringen de aandacht te trekken? Zo ja, dan moeten de inleidende bladzijden van Ir. Harkink het inderdaad afleggen tegen die van T. Want zelfs het N.I.V.E., dat zich blijkbaar geroepen voelt handiger rekenmethoden in ons land te introduceren, kende blijkbaar het boek van Harkink niet, kende de uitvoerige boekbespreking niet die Ir. W. J. Vollewens er in „Euclides" (18e jaargang, 1941/42) aan heeft gewijd en waarin gezegd wordt: „Het zou dan ook m.i. zeer gewenst zijn, dat bij de opleiding van onze middelbare technici het „praktische rekenen" zoals dit in dit boek wordt behandeld als verplicht vak zou worden gegeven, terwijl ook de verschillende opleidingen vóor handels- en kantoorpersoneel zeer nuttig werk zouden doen als zij dit vak zouden geven . . .". Men zou zeggen, het slot van de aanhaling schijnt juist voor een instituut als het N.I.V.E. geschreven. Maar het trof hier geen doel. De gezwollen taal van T. dringt wel door. Laat Zwitserland voor zichzelf beoordelen in hoeverre het de heer T. dankbaar is voor zijn rekenbrochure, voor ons is er in het geheel geen reden het N.I.V.E. dankbaar te zijn voor het houden van een cursus, gebaseerd op een ten onrechte suggereren van iets nieuws, tegen een prijs die het tienvoud bedraagt van de aanschaffing van een uitstekend boek, dat helaas te weinig bekend is.

KORREL CXVII

„En vragen vraegh op vraegh".

In de leerboeken is 'n vraagstuk opgenomen, dat ondanks 't elementaire karakter en bewijs aanleiding geeft tot misschien onverwachte, moeilijke vragen.

't Is de vraag: in welk geval is de projectie van koord.vierh. ABCD (met omg. cirk. γ in vlak V) op vlak W 'n koord.vierh. A'B'C'D'?

't Gebruikelijke bewijs zal wel berusten op 't omgekeerde van de machtstelling, toegepast op b.v. 't snijpunt van AC en BD. Dan blijkt de nodige en voldoende voorwaarde te zijn, dat die lijnen gelijke hoeken met W moeten vormen, m.a.w. dat een bissectrice van de hoeken tussen AC en BD evenwijdig W dient te lopen.

Maar dan kan men er vooreerst niet buiten, te bewijzen of bewezen te hebben, dat van de 6 biss. bij de 3 snijpunten v. d. overstaande zijden v. die volledige vierhoek 'n drietal onderling evenw. lijnen zijn en 't tweede drietal eveneens.

Maar verder blijkt uit de beschouwing van de proj. v. d. middellijn m van γ // W en de middell. $\perp m$, dat de proj. van γ niet is de omg. cirk. γ' van A'B'C'D', en dat nog wel, terwijl 'n cirkel door 3 punten bepaald wordt en hier zelfs 4 punten vaststaan. Enigszins hieraan tegemoetkomend is de opmerking, dat 'n vierhoek in projectie in 't algemeen vanzelf vierhoek blijft, maar 't cirkel-zijn geen proj. invariant is.

Hier is men m.i. gedwongen, kegelsneden binnen de beschouwing te betrekken, althans de ellips ε als proj. van 'n cirkel in 't algemeen, en er op te wijzen, dat in ε oneindig veel koord.vierhoeken beschreven kunnen worden, omdat elke cirk. in 't vlak de ellips in 4 punten snijdt; als kegelsnede is de cirkel pas door 5 punten bepaald. Ingeval men dan ook vergt, dat de proj. van 'n koordenvijfhoek 'n koord. vijfh. is, moet W // V staan en is γ' de proj. van γ.

Op die manier lopen we toch wel erg de kantjes af van de theorie van de kegelsnedenbundel.

Dr. L. CRIJNS.

KORREL CXVIII

Een vierkantsvergelijking opgelost met behulp van een gnomon.

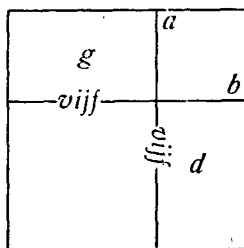
Mohammed ben Musa [1]) geeft deze oplossing van de vergelijking

$$x^2+10x = 39$$

nadat hij eerst een andere, meer uitvoerige oplossing heeft meegedeeld. Zijn werk, uit het begin van de 9e eeuw, toont in de schrijftrant duidelijk het beginstadium van de algebra — hier schijnt het woord algebra het eerst voor te komen. Vooral het ontbreken van een bruikbaar cijfersysteem dwingt tot omschrijving, die niet altijd de duidelijkheid — althans voor ons besef — bevordert.

Van dit in het Arabisch geschreven werk vinden we een Latijnse vertaling bij Libri [2]), waaraan deze passage is ontleend. Het vraagstuk luidde: . . . census et decem radices equantur triginta novem dragmis: een onbekende in het kwadraat, vermeerderd met tien wortels uit dat kwadraat, is gelijk aan negen en dertig. Libri a.w. I 258:

Bovendien is er nog een tweede tekening, die ook tot deze oplossing leidt: n.l. het vlak *a.b.*, een vierkant. Daaraan willen wij nu iets toevoegen, dat gelijk is aan tien wortels van dat vierkant. Wij nemen dus de helft van tien, dat is vijf. Daarvan maken wij twee vlakken aan twee kanten van *a.b.* n.l. de twee vlakken *g.* en *d.*, die ieder een lengte hebben gelijk aan een zijde van *a.b.* en een breedte van vijf, de helft van tien.



Bij het vlak *a.b.* zal er dus overblijven een vierkant, dat ontstaat uit vijf bij vijf, de helft van de tien wortels (onbekenden), die wij hebben toegevoegd aan twee kanten van het eerste vlak. Nu weten wij dat het eerste vlak een vierkant is en de twee vlakken aangebracht aan twee kanten ervan, tien wortels van 't vierkant. En dit samen is negen en

[1]) F. A. Rosen, The Algebra of Mohammed ben Musa. London 1831. Arabische tekst met Engelse vertaling.

[2]) Histoire des sciences mathématiques en Italie I 260 Libri geeft als titel van de Latijnse vertaling: Liber Maumeti filii Moysi alchoarismi de algebra et almuchabala incipit.

dertig. Verder om het grootste vlak tot een volledig vierkant te maken, zal de hele som vier en zestig bedragen. Neem dus de wortel van die vier en zestig, n.l. één van de zijden van het grootste vlak, dat is acht. Wanneer we dus daarvan aftrekken iets dat gelijk is aan hetgeen wij eraan hebben toegevoegd, n.l. vijf, blijft er drie over; dit is de zijde van het vlak *a.b.*; en dit vlak is een vierkant. Immers de zijde zelf is de wortel ervan en het vierkant (kwadraat) is negen.

Latijnse tekst:

Est ejus preterea forma altera ad hoc idem perducens: que est superficies a.b. que est census. Volumus autem ut addamus ei equale decem radicibus ejus. Mediabimus igitur decem et erunt quinque. Et faciemus eas duas superficies super duas partes a.b. que sint due superficies g. et d. quarum cujusque longitudo sit equalis lateri superficiei a.b., et latitudo ejus sit quinque, qui est medietas decem.

Remanebit ergo nobis super superficiem a.b. quadratura quod fit ex quinque in quinque, qui est medietas decem radicum quas addidimus super duas partes superficiei prime. Scimus autem quod superficies prima est census et quod due superficies que sunt super duas ipsius partes, sunt decem radices ejus. Et hoc totum est triginta novem. Adhuc igitur ut majoris superficiei quadratura compleatur erit totum illud quod aggregatur sexaginta quattuor. Accipe ergo radicem ejus, quae est (sexaginta) quattuor, unum laterum superficiei majoris quod est octo. Cum ergo minuerimus ex ea equale ei quod super ipsam addidimus quod est quinque, remanebit tres, qui est latus superficiei a.b. que est census. Ipse namque est radix ejus, et census est novem.

's-Gravenhage. C. J. VOOYS.